J. Perl

Berlijn 1971

Minimierung disjunktiver Normalformen - Darstellung mit abbildungstechnischen Mitteln und Analyse des äquivalenten Überdeckungsproblems; Gedanken zur Existenz von darstellenden Algorithmen.

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Jürgen Perl

aus Flatow/Westpreußen

Gutachter: Dr. H. J. Töpfer

Prof. Dr. H. J. Schneider

Tag der mündlichen Prüfung: 19. 3. 1971

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Inhalt

	Vorwort	-1-
	Einleitung	-2-
I)	Grundlegende Begriffe	-7-
	Konjunktive Form	-7-
	Disjunktive Normalform	-9-
	Partielle konjunktive Form	-10-
	Familie	-11-
	Disjunktive Partialform	-13-
	Charakteristik	-14-
	Problemstellung	-18-
	Die Mengen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_o$ und $\mathfrak{T}_o$	-19-
	Das äquivalente Überdeckungsproblem	-20-
II)	Die Struktur von $\mathfrak{F}$ und die Bildung von Familien	-23-
	Strukturen von Mengen von Termen	-23-
	Verwandtschaft von Termen und Familienbildung	-30-
	Satz über die Bildung zweielementiger Familien	-34-
	Satz über die Bildung mehrelementiger Familien	-40-
	Satz über die vollständige Bestimmung von $\mathfrak{T}_o$	-46-
III)	Algorithmus zur $\mathfrak{B}$ - Bestimmung	-53-
	Satz über die Optimalität	-57-
	Praktische Durchführung	-60-
	Untersuchung des Rechenaufwandes	-66-
IV)	Bestimmung der bewertungsminimalen Überdeckungssysteme von $\mathfrak{F}_o$	-70-
	Kerne und Minkerne	-70-
	Verfahren zur systematischen Kern-Erfassung	-74-
	Einige Anwendungsmöglichkeiten	-76-
V)	Erläuterungen, Ergänzungen, Ausblicke	-80-
	A) Zu Teil I: Kategorielle Beschreibung	-80-
	B) Zu Teil II: Matrizenoperationen	-84-
	C) Zu Teil IV: Analyse von Überdeckungsverfahren	-89-

VI) Zur Existenz von darstellenden Algorithmen -98-
A) Mengen und Eigenschaften -98-
B) Bekannte und darstellbare Mengen -102-
Bedingungen für die Darstellbarkeit von Mengen -107-
Aussage zur Nicht-Existenz optimaler darstellender Algorithmen zur Lösung von Überdeckungsproblemen -108-
C) Rekursive Eigenschaften -109-
Beispiel für ein spezielles, iterativ lösbares Überdeckungsproblem -111-

Verzeichnis der wichtigsten Definitionen -114-

Literaturverzeichnis -116-

Vorwort

Die vorliegende Arbeit baut auf der Diplomarbeit - [6] - des Verfassers auf.

Der Kernpunkt war dort die Behandlung des Minimierungsproblems mit abbildungstechnischen Mitteln; dies führte zwangsläufig zur Formulierung des äquivalenten Überdeckungsproblems und zu einem Verfahren zur Primimplikantenbestimmung.

Die weiterführenden Untersuchungen zeigten, daß das Problem der Minimierung eingebettet ist in eine Fülle weiterer Probleme, die in sehr komplexem Zusammenhang stehen, und die in letzter Konsequenz - bei dem Versuch der algorithmischen Lösung des Überdeckungsproblems - auch erkenntnistheoretische Fragen aufwerfen. (Dies soll auch der hier gewählte Titel zum Ausdruck bringen.)

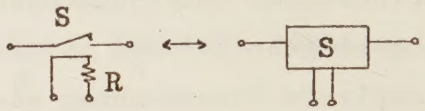
Es liegt auf der Hand, daß insbesondere diese letzten Fragen nur schwer exakt mathematisch behandelt werden können. Daher besteht die Weiterführung der Diplomarbeit zum einen darin, die dort erarbeiteten Ergebnisse zu präzisieren und Ansätze zur Verallgemeinerung anzugeben. Zum anderen werden die oben angesprochenen Fragen, die die Existenz und die Optimalität darstellender Algorithmen betreffen, formuliert; es werden Denkansätze zur Beantwortung dieser Fragen versucht, die auch tatsächlich zu gewissen, plausibel erscheinenden Ergebnissen führen.

Einleitung

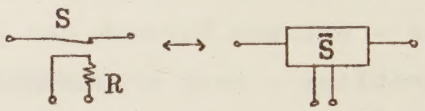
Das in der Arbeit behandelte Problem hat seinen Ursprung in der Schaltkreis-Technik. Die grundlegenden Begriffe sollen hier kurz zusammengestellt werden. (Eine ausführliche Darstellung ist z.B. in [1] gegeben.)

1) Schalter: Als Schalter werden Relais-Schalter eingeführt, die wie folgt gemäß ihrer Arbeitsweise unterschieden werden:

a) nicht-negiert:



b) negiert:

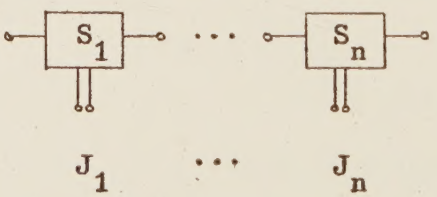


Bekommt in a) das Relais R einen Impuls - den Impuls 1 -, dann wird S geschlossen; andernfalls - beim Impuls 0 - bleibt S offen. Genau umgekehrt ist die Situation in b) .

2) Mathematische Beschreibung:

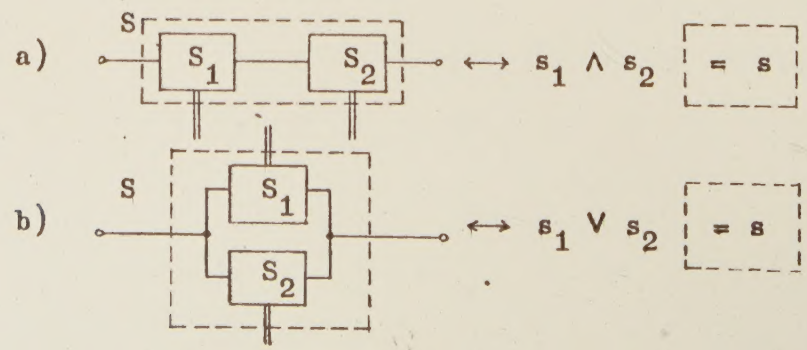
Ein Schalter S wird als Boole'sche Variable s interpretiert. Dabei gehen negierte Schalter in negierte Variable über .
Die Wertzuweisung an eine solche Variable entspricht der Impulsgebung an den entsprechenden Schalter.

Beispiel: Seien $S_1,\dots,S_n$ negierte oder nicht-negierte Schalter, und bekommen die S_i Impulse $J_i \in \{0,1\}$, so entspricht



das der Wertzuweisung $(J_1,\dots,J_n) \longrightarrow s=(s_1,\dots,s_n)$.

Serien- bzw. Parallel-Schaltungen lassen sich durch "$\wedge$" bzw. "$\vee$" beschreiben:

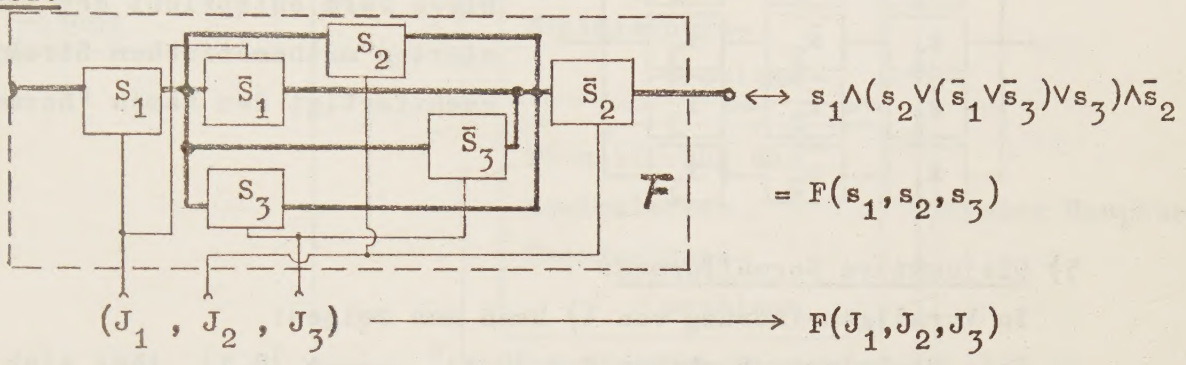


D.h.: In a) ist der "Schalter S" geschlossen, s=1, wenn sowohl S_1 als auch S_2 geschlossen ist. Entsprechendes gilt mit "oder" für b).

3) Serien-Parallel-Schaltwerke:

Aus den bisher definierten Bausteinen lassen sich nun beliebig komplexe Schaltungen aufbauen, die lokal nur aus Serien- oder Parallel-Schaltungen bestehen, und deren mathematische Beschreibung demgemäß nur "∨", "∧" und "-" enthält.

Beispiel:



(Die Verdrahtung des Schaltwerkes ist dick, die Impulsleitungen sind dünn eingezeichnet.)

Dabei wirkt die Schaltung $\mathcal{F}$ als eine Realisierung der entsprechenden Boole'schen Funktion: $\mathcal{F}$ berechnet die Boole'sche Funktion F.

Hat eine Schaltung n Schalter, (wobei durch Indizes eindeutig identifizierte Schalter auch mehrfach auftreten dürfen, aber nur einmal gezählt werden), so gilt für die beschreibenden Boole'sche Funktion F :

$$F : \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}$$

Im vorliegenden Fall wird F durch die drei Abbildungen

$$\bar{} : \{0,1\} \longrightarrow \{0,1\}$$
$$\vee,\wedge : \{0,1\}\times\{0,1\} \longrightarrow \{0,1\}$$

realisiert oder erzeugt.

4) Praktisches Umsetzen von Funktionen bzw. Funktionstabellen in Schaltungen: (In ∧-∨-Darstellung)

Jeder Funktion kann durch die Wertberechnung für die möglichen Argumente eine Tabelle der folgenden Art zugeordnet werden; rückwärts kann aus der Tabelle die Funktion rekonstruiert werden.

Beispiel:

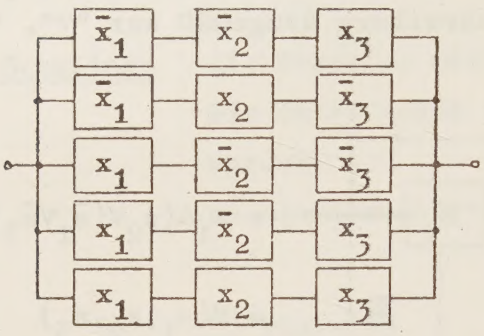
x_1	x_2	x_3	$F(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

F soll also für das Tripel (0,0,1) den Wert 1 annehmen, ebenso für das Tripel (0,1,0) usw. Eine Teilfunktion, die genau für (0,0,1) den Wert 1 annimmt, ist offenbar gerade $\bar{x}_1\wedge\bar{x}_2\wedge x_3$. (Jeder 0 entspricht genau ein $\bar{}$.)

Wie man sich leicht überlegt, erhält man damit für F die folgende (Normal-) Form:

$F(x_1,x_2,x_3) = (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x$

Nach der in 2) gegebenen Äquivalenz läßt sich daraus das realisierende Schaltwerk aufbauen:



Man erkennt gegenüber 3) eine stark schematisierte Form der Schaltung. Diese Form entspricht der schematisierten mathematischen Struktur und rechtfertigt den Namen "Normalform".

5) Disjunktive Normalformen:

In Verallgemeinerung von 4) kann man zeigen:

Jede Boole'sche Funktion $F : \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}$ läßt sich in eine äquivalente Boole'sche Funktion $N : \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}$ überführen, (graph(N)=graph(F)), die die folgende Struktur hat:

$$N(x_1,\ldots,x_n)=g_1(x_1,\ldots,x_n)\vee\ldots\vee g_r(x_1,\ldots,x_n) \ .$$

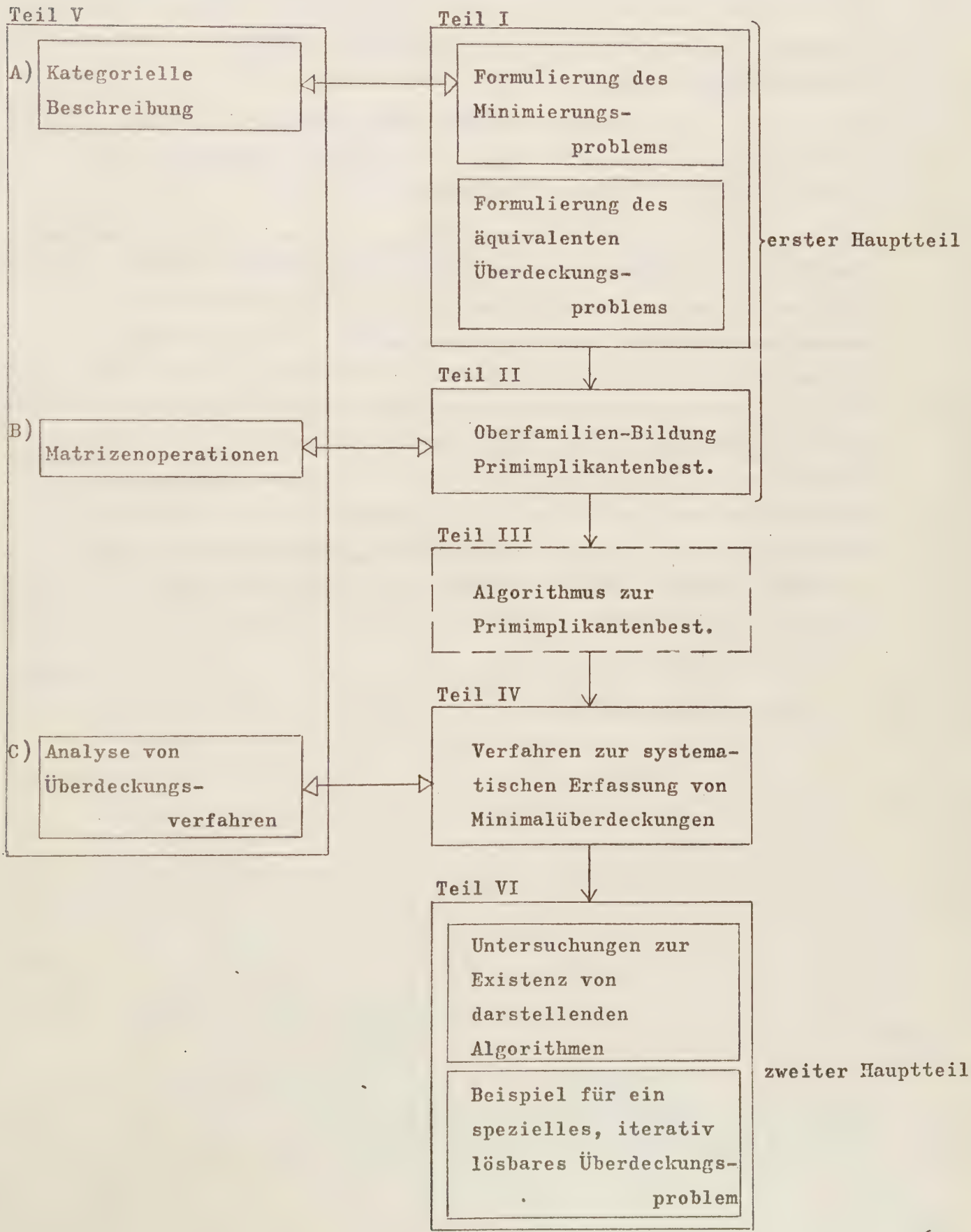
Dabei ist mit K Negation auf $\{0,1\}$ und I Identität auf $\{0,1\}$, $\mathfrak{A}=\{K,I\}$, $g_i : \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}$ definiert durch

$g_i(x_1,\ldots,x_n)=A_{i,1}(x_1)\wedge\ldots\wedge A_{i,n}(x_n)$ mit $A_{i,j} \in \mathfrak{A}$; i=1,...,r

N heißt in der oben gegebenen Form "disjunktive Normalform".

Das Problem besteht nun darin, den Aufwand von Schaltungen zu minimieren, d.h. zu beschreibenden Boole'schen Funktionen solche mit minimaler 'Länge' zu finden, die den vorgegebenen äquivalent sind. Dazu wird in der Literatur vor allem die sogenannte Verschmelzungsregel der Boole'schen Algebra benutzt: $(a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b}) = a$. Die Anwendung dieser Regel führt zu zahlreichen interessanten Verfahren, die im wesentlichen die Bestimmung von Primimplikanten zur Aufgabe haben. (Diese Primimplikanten entsprechen inhaltlich den konjunktiven Bestandteilen der disjunktiven Normalformen in 5).)
Eine eingehende Beschreibung des Verfahrens von McCluskey ist in [1], S. 133 - S.142 zu finden.

Die folgende Übersicht über den Aufbau der Kapitel soll den Inhalt der Arbeit und das methodische Vorgehen erläutern:



In Teil I werden zunächst die Boole'schen Operationen $\wedge$ und $\vee$ durch Abbildungen ersetzt (vergleiche dazu die Stellungnahme auf S.80). Damit ist zum einen eine prägnante Formulierung der Problemstellung möglich, aus der dann zum anderen fast zwangsläufig die Form der weiteren Untersuchung folgt. Diese Untersuchung wird in Teil II durchgeführt, ist sehr unhandlich, führt jedoch auf ein recht günstiges Verfahren zur Bestimmung der Primimplikanten. Dieser Teil wird im Zusammenhang mit Teil V, B) besser verständlich.

Das in Teil II erarbeitete Verfahren wird in Teil III für die praktische Anwendung aufbereitet; es wird dessen Optimalität bewiesen und der Rechenaufwand untersucht.

Aus der Problemstellung in Teil I folgend, ist nun zur vollständigen Lösung des Minimierungsproblems noch die Lösung eines Überdeckungsproblems notwendig. In Teil IV wird ein einfaches Überdeckungsverfahren angegeben. Die generelle Frage nach der Existenz möglichst optimaler Verfahren führt zum einen zu der Analyse in Teil V,C). Zum anderen erschien es sinnvoll, da diese Analyse keine befriedigenden Ergebnisse brachte, grundsätzliche, allgemeine Untersuchungen darüber anzustellen, unter welchen Voraussetzungen sich Mengen durch Algorithmen darstellen lassen, und ob es stets Algorithmen gibt, die gewissen Optimalitätsaussprüchen genügen. Diese Untersuchungen werden in Teil VI durchgeführt und erheben, wie schon im Vorwort gesagt, keinen Anspruch auf Vollständigkeit und absolute Exaktheit.

I) Grundlegende Begriffe

Einleitend werden die Boole'schen Operationen $\wedge$ und $\vee$ als Abbildungen definiert:

Def. 1: Für $n\in\mathbb{N}$ sei $W_0=W_1=\ldots=W_{n-1}=\{0,1\}$; $a_i\in W_i$. Dann ist , mit $W=\{0,1\}$,

$$\wedge,\vee \;:\; \bigtimes_{i=0}^{n-1} W_i \longrightarrow W \quad \text{mit} \quad \wedge(a_{n-1},\ldots,a_0)=1 \Longleftrightarrow a_i=1 \;\text{ für alle } i$$
$$\text{und} \quad \vee(a_{n-1},\ldots,a_0)=0 \Longleftrightarrow a_i=0 \;\text{ für alle } i$$

Folgende Schreibweisen werden vereinbart:

$$\bigwedge_{i=0}^{n-1} a_i = \wedge(a_{n-1},\ldots,a_0) = a_{n-1}\wedge\ldots\wedge a_0$$, entsprechend für die Disjunktion.

Def. 2: 1) Die Elemente von $W^n = \bigtimes_{i=0}^{n-1} W_i$ sollen Terme T heißen:

$$T\in W^n \Longleftrightarrow T=(t_{n-1},\ldots,t_0) \;,\; t_i\in W_i$$

2) Allgemein bezeichnet $x=(x_{n-1},\ldots,x_0)$ einen Unbestimmten-Vektor auf W^n;dabei sind die x_i Unbestimmte auf W_i.

Offenbar besteht W^n aus genau 2^n paarweise verschiedenen Termen.

Def. 3: Sei $\alpha\in W_i$. $\bar{\alpha}$ heißt Negation oder Komplement von α genau dann, wenn gilt:

$$1)\ \bar{\alpha}\in W_i \quad \text{und} \quad 2)\ \bar{\alpha}\neq\alpha$$

Man erhält damit die üblichen Eigenschaften der Negation. Den Begriff der Negation kann man wie folgt durch Abbildungen erfassen:

Def. 4: $K\,,\,I \;:\; W\longrightarrow W$ mit $K(x_i)=\bar{x}_i$ und $I(x_i)=x_i$;
dabei sind die x_i jeweils Unbestimmte auf W_i.

K und I definieren die Menge $\mathfrak{A}=\{K,I\}$.

Beispiel zur Schreibweise:

$$\bar{x}_1\wedge x_0 = \wedge(\bar{x}_1,x_0) = \wedge(K(x_1),I(x_0)) = \wedge(A_1(x_1),A_0(x_0))$$
mit $A_1=K$ und $A_0=I$

Diese Schreibweise gestattet eine allgemeine Darstellung der konjunktiven Form:

Def. 5: $F : \bigtimes_{i=0}^{n-1} W_i \longrightarrow W$ mit $F(x) = \bigwedge_{i=0}^{n-1} A_i(x_i)$, $A_i\in\mathfrak{A}$

heißt konjunktive Form.

Mit $\mathfrak{F}$ werde die Menge aller paarweise verschiedenen konjunktiven Formen bezeichnet.

Zwischen konjunktiven Formen einerseits und Termen andererseits besteht eine enge Beziehung; insbesondere zeichnen konjunktive Formen spezielle Terme aus:

Def. 6: $T \in W^n$ heißt genau dann zugehöriger Term von $F \in \mathfrak{F}$, wenn gilt:

$$t_i = 1 \Longleftrightarrow A_i = I \ .$$

Nach Def. 5 ist zu jeder explizit gegebenen konjunktiven Form der zugehörige Term bestimmbar. Da es genau 2^n paarweise verschiedene Terme gibt, folgt daraus:

(1) Es gibt genau 2^n paarweise verschiedene konjunktive Formen: $|\mathfrak{F}| = 2^n$, und die Zuordnung $\mathfrak{F} \longrightarrow W^n$ mit

$$F \longrightarrow T_T \text{ zugehöriger Term von } F$$ ist bijektiv.

Wie der folgende Satz zeigt, sind die zugehörigen Terme konjunktiver Formen genau die Argumente, für die diese Formen den Wert 1 annehmen.

Satz 1: F sei konjunktive Form, $T \in W^n$.
Dann gilt: $F(T)=1 \Longleftrightarrow$ T ist zugehöriger Term von F

Beweis: $F(T)=1 \Longleftrightarrow A_i(t_i)=1$ für alle i

$\Longleftrightarrow t_i=0$ für $A_i=K$ und $t_i=1$ für $A_i=I$ für alle i
$\Longleftrightarrow$ T zugehöriger Term von F

D.h.: T zugehöriger Term von $F \Longleftrightarrow F(T)=1$ und $F(S)=0$ für alle $S \in W^n - \{T\}$

(2) Aus Def. 6 folgt noch unmittelbar, daß zwischen einer konjunktiven Form F und dem zugehörigen Term T ein eindeutiger Zusammenhang bezüglich der expliziten Struktur besteht:
Jedem Negationszeichen $\bar{}$ in der Darstellung von F entspricht genau eine 0 an der entsprechenden Stelle von T.

Beispiel: (für n=3)

Sei $F(x_2,x_1,x_0) = A_2(x_2) \wedge A_1(x_1) \wedge A_0(x_0)$
$= K(x_2) \wedge K(x_1) \wedge I(x_0)$
$\bar{x}_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge x_0 \ .$

Dann ist $T = (0, 0, 1)$ zugehöriger Term von F mit

$$F(T) = F(0,0,1) = 1 \wedge 1 \wedge 1 = 1 \ .$$

Den Termen lassen sich eindeutig Indizes $d(T)$ zuordnen:

Def. 7: Sei $T=(t_{n-1},\ldots,t_0) \in W^n$.
Es wird die Abbildung $d : W^n \longrightarrow \mathbb{N}_o$ definiert durch

$$d(T) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i t_i \ .$$

Offenbar ist die Indizierung eindeutig, und die Folge $t_{n-1},\ldots,t_o$ ist gerade die Dualzahldarstellung von d(T).

(3) Man erhält für den Index ν des Terms T_ν die Beziehung

$$d(T_\nu) = \nu \ .$$

Wegen der eindeutigen Zuordnung von konjunktiven Formen und zugehörigen Termen lassen sich konjunktive Formen in der gleichen Weise wie die Terme ordnen. Dabei erhält jede konjunktive Form den Index des zugehörigen Terms.

Ist also etwa im obigen Beispiel $F_\mu(T_\nu) = F_\mu(T_5) = 1$, so ist $\mu = 5$.

Damit erhält man aus Satz 1 :

(4) $$F_\mu(T_\nu) = \delta_{\mu,\nu}$$

Durch disjunktive Zusammenfassung konjunktiver Formen erhält man einen weiteren Abbildungstyp. Das soll zunächst für n=3 an einem Beispiel erläutert werden:

Es seien die beiden konjunktiven Formen $F_3(x) = \wedge(\bar{x}_2, x_1, x_0)$ und $F_7(x) = \wedge(x_2, x_1, x_0)$ gegeben. Dann gilt $F_3(T) \in W$ und $F_7(T) \in W$ für alle $T \in W^n$ (hier für n=3). Daher ist auch die Anwendung von $\vee$ auf das Tupel $(F_3(T), F_7(T)) \in W^2$ sinnvoll, und es ist $\vee(F_3(T), F_7(T)) \in W$ für alle $T \in W^n$.

So erhält man $\vee(F_3(T_3), F_7(T_3)) = 1$, da $F_3(T_3) = 1$

und $\vee(F_3(T_7), F_7(T_7)) = 1$, da $F_7(T_7) = 1$.

Ist dagegen $\nu \neq 3$ und $\nu \neq 7$, so ist offenbar $F_3(T_\nu) = F_7(T_\nu) = 0$, und es gilt $\vee(F_3(T_\nu), F_7(T_\nu)) = 0$.

Def. 8: Sei $P \in \mathfrak{P}(\mathfrak{J})$. (Hier und im folgenden steht $\mathfrak{P}(\ )$ für "Potenzmenge von".)

Dann heißt $N_P = W^n \longrightarrow W$ mit $N_P(x) = \bigvee_{F_\nu \in P} F_\nu(x)$ disjunktive Normalform.

Mit $\mathfrak{N}$ werde die Menge aller paarweise verschiedenen disjunktiven Normalformen bezeichnet. (Dabei ist $N_{P_1} \neq N_{P_2} \Longleftrightarrow P_1 \neq P_2$)

Lemma 1: Mit $P = \left\{ F_\nu \,\middle|\, \nu \in J, J \subset \{0, \ldots, 2^n - 1\} \right\}$ gilt:

$$N_P(T_\mu) = \delta_{\mu,J} \ , \text{ wobei } \delta_{\mu,J} = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu \in J \\ 0 & \text{für } \mu \notin J \end{cases}$$

Beweis: $N_P(T_\mu) = 1 \Longleftrightarrow F_\nu(T_\mu) = 1$ für mindestens ein $F_\nu \in P$

$\Longleftrightarrow F_\nu(T_\mu) = 1$ für mindestens ein $\nu \in J$

$\Longleftrightarrow$ für mindestens ein $\nu \in J$ gilt $\mu = \nu$

$\Longleftrightarrow \mu \in J$

Damit ist bereits alles gezeigt.

Abschließend zum Begriff der disjunktiven Normalform noch ein Beispiel: Sei $F_0(x) = \wedge(\bar{x}_2,\bar{x}_1,\bar{x}_0)$,

$F_3(x) = \wedge(\bar{x}_2,x_1,x_0)$,

$F_5(x) = \wedge(x_2,\bar{x}_1,x_0)$; dann ist $P = \{F_0,F_3,F_5\}$, also $J = \{0,3,5\}$, und man erhält:

$$N_P(x) = (\bar{x}_2\wedge\bar{x}_1\wedge\bar{x}_0) \vee (\bar{x}_2\wedge x_1\wedge x_0) \vee (x_2\wedge\bar{x}_1\wedge x_0) = \bigvee_{F_\nu\in P} F_\nu(x)$$

Tritt nun speziell für $N_P\in\mathfrak{N}$ der Fall $P=\{F_\nu\}$ ein, gilt also $|P|=1$, so gilt offenbar $N_P(T)=F_\nu(T)$ für alle $T\in W^n$; daher ist in diesem Fall $N_P = F_\nu$. Das heißt:

(5) $$\mathfrak{F} \subset \mathfrak{N}$$

Analog zu den konjunktiven Formen lassen sich nun allgemeinere Abbildungen von W^n nach W definieren, deren Wert für $T\in W^n$ nur von s Komponenten ($s\leq n$) von T abhängt.

Beispiel: Sei n=4, s=2. Dann ist durch $F^*(x) = \wedge(A_2(x_2),A_0(x_0))$ mit $A_2,A_0\in\mathfrak{A}$ eine solche Abbildung gegeben. F^* wird hier also nur auf die Komponenten t_2 und t_0 eines jeden Terms $T\in W^n$ angewendet.

Die Abbildung F^* ist also durch die Indexmenge $J=\{2,0\}\subset\{3,2,1,0\}$ gekennzeichnet, und man kann schreiben:

$$F_J^* : \bigtimes_{i=0}^{n-1} W_i \longrightarrow W \quad \text{mit} \quad F_J^*(x) = \bigwedge_{i\in J} A_i(x_i)$$

Das Indexsymbol J der Abbildung F_J^* gibt also gerade die Menge derjenigen $i\in\{n-1,\ldots,0\}$ an, für die die entsprechenden Komponenten t_i von T für die Bildung des Wertes $F_J^*(T)$ eine Rolle spielen.

Das Indexsymbol J ist andererseits natürlich kein Mittel zur eindeutigen Identifikation der Abbildung F_J^* .

Def. 9: Sei $J\subset\{n-1,\ldots,0\}$. Dann heißt $F_J^* : W^n \longrightarrow W$ mit $F_J^*(x) = \bigwedge_{i\in J} A_i(x_i)$ partielle konjunktive Form .

Mit $\mathfrak{F}^*$ werde die Menge aller paarweise verschiedenen patiellen konjunktiven Formen bezeichnet.

Ein Vergleich mit Def. 5 zeigt, daß eine partielle konjunktive Form $F_J^*\in\mathfrak{F}^*$ für $J=\{n-1,\ldots,0\}$ übergeht in eine konjunktive Form $F\in\mathfrak{F}$. Daraus folgt:

(6) $$\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}^*$$

Im Anschluß an Satz 1 lassen sich nun $F_J^* \in \mathfrak{F}^*$ solche Terme T als zugehörige Terme zuordnen, für die $F_J^*(T)=1$ ist. Ist $|J|=s$, so ist der Wert von $F_J^*(T)$ unabhängig von den n-s Komponenten t_i von T, für die $i \notin J$ gilt. Für die übrigen Komponenten ergibt sich nach Satz 1 genau eine zulässige Konstellation. Damit gilt:

(7) Zu $F_J^* \in \mathfrak{F}^*$ mit $|J|=s$ gibt es genau 2^{n-s} eindeutig bestimmte zugehörige Terme.

Def. 10: Eine Menge $\mathfrak{Q}$ von Termen heißt Familie, wenn gilt:
Es existiert $F^* \in \mathfrak{F}^*$ mit $F^*(T)=1 \Longleftrightarrow T \in \mathfrak{Q}$.

Damit erhält man:

(8) Die zu $F^* \in \mathfrak{F}^*$ gehörenden Terme bilden eine Familie $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}$ heißt auch die zu F^* gehörende Familie.

Analog (1) läßt sich nachweisen, daß die Zuordnung von partiellen konjunktiven Formen und zugehörigen Familien bijektiv ist.
Dieser Übergang von Abbildungen zu Mengen von Termen ist nützlich, wenn man das Minimierungsproblem in ein Überdeckungsproblem überführen will.

Lemma 2: Partielle konjunktive Formen und Familien lassen sich gemäß $F^* \longrightarrow \mathfrak{Q}_{\mathfrak{Q}}$ zugehörige Familie von F^* eindeutig einander zuordnen.

Beweis: 1) Aus (7) und (8) folgt: Zu jeder partiellen konjunktiven Form gibt es genau eine zugehörige Familie.

2) Sei nun eine Familie $\mathfrak{Q}$ gegeben. Dann gibt es nach Def. 10 und (8) mindestens ein $F_J^* \in \mathfrak{F}^*$, sodaß $\mathfrak{Q}$ zugehörige Familie von F_J^* ist; sei $|J|=s$, dann ist jedenfalls $|\mathfrak{Q}|=2^{n-s}$,

Annahme:
Es gibt $F_{J'}^* \in \mathfrak{F}^*$ mit $F_{J'}^* \neq F_J^*$, sodaß $\mathfrak{Q}$ auch zugehörige Familie von $F_{J'}^*$ ist. Wegen $|\mathfrak{Q}|=2^{n-s}$ gilt dann: $|F_J^*|=|F_{J'}^*|=s$.
Sind nun etwa $F_J^*(x)=\bigwedge_{i \in J} A_i(x_i)$ und $F_{J'}^*(x)=\bigwedge_{j \in J'} B_j(x_j)$ mit $A_i, B_j \in \mathfrak{A}$, dann sind wegen $F_J^* \neq F_{J'}^*$ und $|F_J^*|=|F_{J'}^*|$ nur die folgenden beiden Fälle möglich:

a) $J = J'$ und $A_\nu \neq B_\nu$ für mindestens ein $\nu \in J$.

$\mathfrak{S}$ zugehörige Familie von $F_J^* \Longrightarrow A_i(t_i)=1$ f.a. $i \in J$

$\Longrightarrow A_\nu(t_\nu)=1$

$\Longrightarrow B_\nu(t_\nu)=0$

Also ist $\mathfrak{S}$ keine zugehörige Familie von $F_{J'}^*$.

Widerspruch !

b) $J \neq J'$; dann gibt es mindestens ein $\nu \in J'$ mit $\nu \notin J$, und für dieses ν gilt dann für $T \in \mathfrak{S}$: $B_\nu(t_\nu)=1$, da $\nu \in J'$.

Sei nun $T' \in \mathfrak{S}$ der Term, der sich von T genau in der ν-ten Komponente unterscheidet: $t'_\nu = \bar{t}_\nu$.

Wegen $\nu \notin J$ und $\mathfrak{S}$ zugehörige Familie von F_J^* ist definitionsgemäß mit $F_J^*(T)=1$ sicher auch $F_J^*(T')=1$, also tatsächlich auch $T' \in \mathfrak{S}$.

Andererseits gilt $B_\nu(t_\nu)=1$, sodaß $B_\nu(t'_\nu)=B_\nu(\bar{t}_\nu)=0$ ist.

Wegen $\nu \in J'$ ist dann aber auch $F_{J'}^*(T')=0$.

Das heißt: T' ist kein zugehöriger Term von $F_{J'}^*$, und somit ist, wegen $T' \in \mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}$ auch keine zugehörige Familie von $F_{J'}^*$. Widerspruch !

Eine nähere Untersuchung der Struktur von Familien wird im folgenden Kapitel durchgeführt.

Hier sollen nun zunächst an einem Beispiel die für die partiellen konjunktiven Formen wichtigen Begriffsbildungen erläutert werden:

Sei $n=4$, $s=2$; $J=\{3,2\} \subset \{3.2.1.0\}$. Ein $F_J^* \in \mathfrak{F}^*$ ist dann etwa gegeben durch:

$$F_J^*(x) = \wedge(\bar{x}_3, x_2) \ .$$ (Insbesondere ist also $A_3=K$, $A_2=I$.)

Es erscheinen also nur die x_i in der Darstellung, für die $i \in J$ ist.

Für einen zugehörigen Term $T=(t_3,t_2,t_1,t_0)$ muß gelten $t_3=0$, $t_2=1$.

Daher kommen genau die folgenden Terme als zugehörige Terme in Frage:

$T_4=(0,1,0,0)$

$T_5=(0,1,0,1)$

$T_6=(0,1,1,0)$

$T_7=(0,1,1,1)$

Diese Terme bilden die zugehörige Familie

$\mathfrak{S} = \{T_4, T_5, T_6, T_7\}$

Durch disjunktive Zusammenfassung konjunktiver Formen wurden die disjunktiven Normalformen definiert. Entsprechend soll nun ein neuer Abbildungstyp eingeführt werden.

Seien etwa $F_{J_1}, F_{J_2}, F_{J_3} \in \mathfrak{F}^*$ gegeben mit $F_{J_1}(x)=\wedge(\bar{x}_3,x_1)$

$F_{J_2}(x)=\wedge(x_3,\bar{x}_1,x_0)$

$F_{J_3}(x)=\wedge(x_2,x_1,\bar{x}_0)$

(Hier und im folgenden werden partielle konjunktive Formen entweder mit F^*, wenn die Indexmenge nicht interessant ist, oder mit F_J bzw. F_{J_j}, wenn eine oder mehrere partielle konjunktive Formen mit wesentlichen Indexmengen betrachtet werden, bezeichnet.)

Für jedes $T \in W^n$ sind $F_{J_1}(T), F_{J_2}(T), F_{J_3}(T)$ definitionsgemäß aus W, und damit ist auch $\vee(F_{J_1}(T), F_{J_2}(T), F_{J_3}(T))$ wieder ein eindeutig bestimmter Wert aus W.

Als Beispiel soll der Wert für $T_2=(0,0,0,1,0)$ und für $T_9=(0,1,0,0,1)$ ermittelt werden.

Für T_2 erhält man: $F_{J_1}(T_2)=\wedge(\bar{t}_3,t_1) \quad =\wedge(1,1) \quad =1$

$F_{J_2}(T_2)=\wedge(t_3,\bar{t}_1,t_0)=\wedge(0,0,0)=0$

$F_{J_3}(T_2)=\wedge(t_2,t_1,\bar{t}_0)=\wedge(0,1,1)=0$,

also: $\vee(F_{J_1}(T_2),F_{J_2}(T_2),F_{J_3}(T_2)) = \vee(1,0,0) = 1$.

Entsprechend ergibt sich für T_9: $F_{J_1}(T_9)=F_{J_3}(T_9)=0$, $F_{J_2}(T_9)=1$.

Daher ist $\vee(F_{J_1}(T_9), F_{J_2}(T_9), F_{J_3}(T_9)) = \vee(0,1,0) = 1$.

In Verknüpfungsschreibweise erhält man:

$$\vee(F_{J_1}(x),F_{J_2}(x),F_{J_3}(x)) = (\bar{x}_3 \wedge x_1) \vee (x_3 \wedge \bar{x}_1 \wedge x_0) \vee (x_2 \wedge x_1 \wedge \bar{x}_0)$$

<u>Def. 11:</u> Sei $P^* = \{F_{J_j} \mid j \in \Theta_j\} \in \mathfrak{P}(\mathfrak{F}^*)$. Dann heißt $N_{P^*} : W^n \longrightarrow W$ mit $N_{P^*}(x) = \bigvee_{F_{J_j} \in P^*} F_{J_j}(x)$ disjunktive Partialform.

Mit $\mathfrak{N}^*$ werde die Menge aller paarweise verschiedenen disjunktiven Partialformen bezeichnet.

Zur Bezeichnungsweise: Sind bei den disjunktiven Partialformen die Mengen P^* zur Kennzeichnung nicht wesentlich, es wird auch einfach N^* oder N_i^* geschrieben. Entsprechendes gilt für die disjunktiven Normalformen.

Ist in Def. 11 insbesondere $J_j=\{n-1,\ldots,0\}$ für alle $j\in\Theta_j$, so ist jedes $F_{J_j}\in P^*$ gerade eine konjunktive Form $F_\nu\in\mathfrak{J}$. In diesem Fall ist also $P^*\in\mathfrak{P}(\mathfrak{J})$. Jede disjunktive Normalform $N\in\mathfrak{N}$ ist somit eine spezielle disjunktive Partialform $N^*\in\mathfrak{N}^*$. Das heißt aber:

(9) $$\mathfrak{N}\subset\mathfrak{N}^*$$

Ist noch spezieller $|\Theta_j|=1$, also $P^*=\{F_J\}$, so ist auch $N_{P^*}(T)=F_J(T)$ für alle $T\in W^n$; es ist mithin $N_{P^*}=F_J$. Das heißt:

(10) $$\mathfrak{J}^*\subset\mathfrak{N}^*$$

Die im obigen Beispiel angeführte Abbildung $\vee(F_{J_1}(x),F_{J_2}(x),F_{J_3}(x))$ ist nach Def. 11 wie folgt als disjunktive Partialform zu schreiben:

$$\Theta_j=\{1,2,3\}\quad,\quad P^*=\{F_{J_1},F_{J_2},F_{J_3}\}=\{F_{J_j}\mid j\in\Theta_j\}$$

$$N_{P^*}(x)=\bigvee_{F_{J_j}\in P^*}F_{J_j}(x)$$

$$=\vee(\wedge(\bar{x}_3,x_1),\wedge(x_3,\bar{x}_1,x_0),\wedge(x_2,x_1,\bar{x}_0))$$

Es sei nun $N_P\in\mathfrak{N}$ gegeben. Durchläuft T alle Terme in der Reihenfolge $T_0,\ldots,T_{2^n-1}$, so nimmt $N_P(T)$ gewisse Werte $c_0,\ldots,c_{2^n-1}$ aus W an, d.h. $c_i=N_P(T_i)\in W$, $i=0,\ldots 2^n-1$.

Def.12: Ein Vektor $C=(c_i)\in W^{2^n}$ heißt Charakteristik; diese spezielle Menge W^{2^n} soll die Menge $\mathfrak{C}$ der Charakteristiken genannt werden.

Satz 2: Die Abbildung $f:\mathfrak{N}\longrightarrow\mathfrak{C}$ mit $f(N_P)=\left(N_P(T_i)\right)=C\in\mathfrak{C}$ ist bijektiv.

Beweis: a) Nach (1) ist $|\mathfrak{J}|=2^n$, sodaß also $|\mathfrak{P}(\mathfrak{J})|=2^{2^n}$ gilt. Nach Def. 8 ist dann auch $|\mathfrak{N}|=2^{2^n}$.

b) Jedes $C\in\mathfrak{C}$ hat 2^n Komponenten, die beliebig die Werte 0 und 1 annehmen können. Daher ist $|\mathfrak{C}|=2^{2^n}$.

Aus a) und b) folgt: $|\mathfrak{N}|=|\mathfrak{C}|$ (*)

c) f ist subjektiv:

Sei $C\in\mathfrak{C}$ beliebig gegeben, und sei $J=\{i\mid c_i=1\}\subset\{0,\ldots 2^n-1\}$; dann ist zunächst $c_i=\delta_{i,J}$. Durch J ist dann nach Def. 8 und Lemma 1 eine disjunktive Normalform $N_P\in\mathfrak{N}$ definiert mit $N_P(T_i)=\delta_{i,J}$. Daher gilt:

$$f(N_P)=\left(\delta_{i,J}\right)=(c_i)=C$$

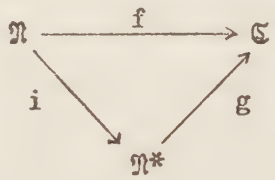
Es gibt also zu jedem $C\in\mathfrak{C}$ ein $N\in\mathfrak{N}$ mit $f(N)=C$.
Nach c) ist f surjektiv; damit ist nach (*) f auch bijektiv.

In der Folge werden einige weitere Abbildungen betrachtet werden, die einen wesentlichen Aufschluß darüber geben sollen, wie etwa disjunktive Partialformen und deren Charakteristiken miteinander zusammenhängen. Das Problem liegt ja in der Minimierung solcher disjunktiven Partialformen, d.h. es sollen Abbildungen, wiederum disjunktive Partialformen, so gefunden werden, daß sie die gleiche Charakteristik haben, jedoch gleichzeitig gewisse Minimalitäts-forderungen erfüllen.

Satz 3: Die Abbildung $g : \mathfrak{N}^* \longrightarrow \mathfrak{C}$ werde definiert durch

$$g(N_{P^*}) = \left[N_{P^*}(T_\nu)\right] = \left[\bigvee_{F_{J_j}\in P^*} F_{J_j}(T_\nu)\right] = C\in\mathfrak{C}$$

Dann ist das folgende Diagramm kommutativ, und g ist surjektiv, aber nicht injektiv; i ist dabei Einbettung.



Beweis: 1) Das Diagramm ist kommutativ:
Sei $N_P\in\mathfrak{N}$ beliebig. Durch $P=\left\{F_j \mid j\in J, J\subset\{0,\ldots 2^n-1\}\right\}$ ist dann J definiert, und es ist $N_P(T_\mu)=\delta_{\mu,J}$. (Lemma 1)

Damit gilt:

a) $f(N_P) = \delta_{\mu,J}$

Zum anderen erhält man:

b) $i(N_P)=N_{P^*}\in\mathfrak{N}^*$ mit $N_{P^*}=N_P$. Das heißt aber, daß in der Darstellung

$N_{P^*}(x)=\bigvee_{F_{J_j}\in P^*} F_{J_j}(x)$ gelten muß: $J_j=\{n-1,\ldots,o\}$ für alle j .

Daraus folgt, daß $F_{J_j}\in\mathfrak{J}$ für alle j gilt; also ist $P^*\in\mathfrak{P}(\mathfrak{J})$.

Wegen $N_{P^*}=N_P$ erhält man daraus nach Def. 8 $P^*=P$.

Hat daher N_P die Darstellung $N_P(x)=\bigvee_{F_\nu \in P} F_\nu(x)$, so erhält man:

$$g(i(N_P))=g(N_{P^*})=\left(\bigvee_{F_{J_j}\in P^*} F_{J_j}(T_\mu)\right)=\left(\bigvee_{F_\nu\in P} F_\nu(T_\mu)\right)=\left(\delta_{\mu,J}\right)$$

Aus a) und b) folgt: $f(N_P) = g(i(N_P))$ für alle $N_P \in \mathfrak{N}$.
Das Diagramm ist also kommutativ.

2) Aus der Kommutativität des Diagramms und der Bijektivität von f (Satz 2) folgt sofort:
g ist surjektiv.

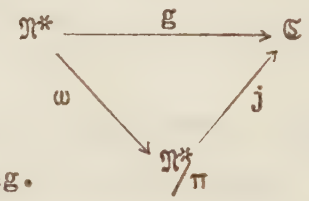
3) g ist nicht injektiv:
Wegen $\mathfrak{N} \subsetneq \mathfrak{N}^*$ ist $|\mathfrak{N}|<|\mathfrak{N}^*|$, also auch $|\mathfrak{C}|<|\mathfrak{N}^*|$, da nach Satz 2 $|\mathfrak{C}|=|\mathfrak{N}|$ gilt. Wäre g injektiv, so nach 2) auch bijektiv. Daraus würde aber folgen: $|\mathfrak{C}|=|\mathfrak{N}^*|$, Widerspruch!

Satz 3 legt es nahe, auf $\mathfrak{N}^*$ eine Äquivalenzrelation bezüglich g zu erklären:

Def. 13: $N_1^* \pi N_2^* \iff g(N_1^*) = g(N_2^*)$; $N_1^*, N_2^* \in \mathfrak{N}^*$

Aus dem Abbildungssatz der linearen Algebra folgt dann unmittelbar:

Satz 4: Das nebenstehende Diagramm ist kommutativ. Wegen g surjektiv ist dabei j bijektiv; ω ist die natürliche Abbildung.



Ein Vergleich von Satz 3 und Satz 4 zeigt:

(11) Es gibt eine bijektive Abbildung $b : \mathfrak{N} \longrightarrow \mathfrak{N}^*/\pi$ mit
$b(N) = \{N^* \mid g(N^*)=f(N)\} \in \mathfrak{N}^*/\pi$.

Insgesamt erhält man so, daß jedem $C \in \mathfrak{C}$ eineindeutig eine Klasse $[N^*] \in \mathfrak{N}^*/\pi$ zugeordnet ist; dabei ist durch $N=f^{-1}(C)$ eindeutig N bestimmt, sodaß $[N]=[N^*]$ gilt.

Die beschriebene Klassenbildung auf $\mathfrak{N}^*$ motiviert das weitere Vorgehen: Wird nämlich auf $\mathfrak{N}^*$ eine Bewertung erklärt, dann überträgt sich eine solche Bewertung auf die Elemente jeder Klasse, und man kann unter den äquivalenten disjunktiven Partialformen N^* einer Klasse $[N^*]$, die etwa zu einer vorgegebenen Charakteristik C aufgesucht wurde, diejenigen Formen auszeichnen, die eine gewisse extremale Bewertung haben:

Sei $E : \mathfrak{N}^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ eine solche Bewertung. Für $[N^*]_\pi \subset \mathfrak{N}^*$ induziert das die eingeschränkte Abbildung $\tilde{E} = E/_{[N^*]_\pi}$: $\tilde{E} : [N^*]_\pi \longrightarrow \mathbb{Z}$.

Auf $[N^*]_\pi$ wird bezüglich $\tilde{E}$ eine Äquivalenzrelation τ erklärt durch $N_1^* \tau N_2^* \Longleftrightarrow \tilde{E}(N_1^*) = \tilde{E}(N_2^*)$, und man erhält:

$$[N^*]_\pi \xrightarrow{\omega} [N^*]/_\tau = \{ \langle N^* \rangle_\varepsilon \mid \langle N^* \rangle_\varepsilon \text{ ist } \tau\text{-Klasse in } [N^*]_\pi \text{ mit der jeweiligen Bewertung } \varepsilon = \tilde{E}(N^*) \}$$

Die Elemente der Klasse $\langle N^* \rangle_\varepsilon$ mit minimalem ε in $[N^*]/_\tau$ werden dann disjunktive Minimalformen genannt werden.

Def. 14: Bewertung oder Verknüpfungseffekt $E : \mathfrak{N}^* \longrightarrow \mathbb{Z}$:

Sei $N_{P^*} \in \mathfrak{N}^*$ mit $P^* = \{ F_{J_j} \mid F_{J_j} \in \mathfrak{J}^* , j \in \Theta \}$;

dann ist $E(N_{P^*}) = |P^*| - 1 + \sum_{j \in \Theta} |J_j|$

Daraus ergibt sich in $\mathfrak{N}, \mathfrak{J}^*$ und $\mathfrak{J}$ insbesondere:

(12) $E(N_P) = (n+1) \cdot |P| - 1$

$E(F_{J_j}) = |J_j|$

$E(F) = n$

Die spezielle Wahl der in Def. 14 vereinbarten Bewertung erklärt sich aus den Anforderungen der Praxis (Schaltwerkentwurf).

Den Begriff Bewertung oder Verknüpfungseffekt veranschaulicht das folgende Beispiel: (für n=3)

Sei $N_{P^*}(x) = \vee(F_{J_1}(x), F_{J_2}(x), F_{J_3}(x))$ mit

$F_{J_1}(x) = \wedge(x_2, \bar{x}_0)$, also $|J_1| = 2$

$F_{J_2}(x) = \wedge(x_1, x_0)$, also $|J_2| = 2$

$F_{J_3}(x) = \wedge(\bar{x}_2, x_1, \bar{x}_0)$, also $|J_3| = 3$

Zudem ist offenbar $|P^*| = 3$, sodaß man nach Def. 14 erhält:

$$E(N_{P^*}) = |P^*| - 1 + \sum_{j=1}^{3} |J_j| = 2 + 7 = 9$$

Zur Bestimmung des Verknüpfungseffektes wird also die Summe aus der Anzahl aller explizit auftretenden Unbestimmten (hier 7) und der Anzahl der Disjunktionszeichen (hier $|P^*| - 1 = 2$) gebildet. Dies wird noch einmal aus der Verknüpfungsschreibweise von $N_{P^*}(x)$ deutlich:

$$N_{P^*}(x) = (x_2 \wedge \bar{x}_0) \vee (x_1 \wedge x_0) \vee (\bar{x}_2 \wedge x_1 \wedge \bar{x}_0)$$

Wie oben bereits angekündigt, werden nun disjunktive Minimalformen erklärt:

Def. 15: Zu $C \in \mathfrak{C}$ heißt $N^* \in \mathfrak{N}^*$ mit $g(N^*)=C$ disjunktive Minimalform, wenn N^* in $[N^*]=g^{-1}(C)$ minimal bezüglich der Bewertung E ist.

Daraus ergibt sich nun unmittelbar die folgende Problemstellung:

(13) Ist $C \in \mathfrak{C}$ vorgegeben, und ist $N=f^{-1}(C) \in \mathfrak{N}$, so sind die disjunktiven Minimalformen $N_o^* \in [N]$ zu finden.

Hierzu sind vielleicht noch die folgenden Bemerkungen nützlich:

(14) a) Wie auf Seite 16 schon erläutert, ist also die Klasse $\langle N \rangle_{\varepsilon_{min}} \subset [N]$ zu finden.
Offenbar unterscheiden sich die Elemente einer jeweiligen Klasse $\langle N \rangle_{\varepsilon}$ in den wesentlichen Strukturen nicht voneinander. Es wäre daher auch nicht motiviert, lediglich nach einer - nicht näher bestimmten - Minimalform als Lösung des Problems zu suchen. Andererseits ermöglicht es die Kenntnis der ganzen Klasse der Minimalformen, nach weiteren, praxisbedingten Kriterien spezielle Formen auszusortieren.

b) Offenbar ist es völlig gleichbedeutend, ob $C \in \mathfrak{C}$, $N \in \mathfrak{N}$ oder $N^* \in \mathfrak{N}^*$ vorgegeben wird. Nach (11) erhält man jedenfalls die zu betrachtende Klasse $[N]$ mit dem Repräsentanten $N \in \mathfrak{N}$.
In der praktischen Anwendung läßt sich zu gegebenen N oder N^* durch Ausrechnen leicht die entsprechende Charakteristik C bestimmen (Satz 3 und Def. 12).
Die Betrachtung des Problems in der Form von (13), also unter Vorgabe von C, erweist sich dagegen als günstig, wenn der Übergang zur mengentheoretischen Betrachtung vollzogen wird.

Wie bereits mehrfach angedeutet, wird das Problem nach (13) nun in ein äquivalentes, nur noch Mengen betreffendes Problem umgeformt werden. Die Mengen werden dabei Familien und Familiensysteme sein. Dabei kommt das Ergebnis von Lemma 2 - eineindeutige Zuordnung von partiellen konjunktiven Formen und zugehörigen Familien - zum Tragen. In naheliegender Weise werden dann gemäß Def. 11 den disjunktiven Partialformen die Systeme der den F_{J_j} zugehörigen Familien zugeordnet.

Def. 16: $\mathfrak{F}$ sei die Menge aller 2^n Terme, $\mathfrak{T}$ sei die Menge aller Familien über $\mathfrak{F}$.

Def. 17: Sei $C_o \in \mathfrak{C}$ wie in (13) vorgegeben mit $c_{o,i}=1 \Longleftrightarrow i \in J_o$. Dann sollen die Terme T_i mit $i \in J_o$, für die also gerade $N_o(T_i)=1$ gilt $(N_o=f^{-1}(C_o))$, zulässige Terme von C_o heißen; die zulässigen Terme von C_o definieren die Menge $\mathfrak{S}_o=\{T_i \mid i \in J_o\}$.

Das heißt: Ist $C_o \in \mathfrak{C}$ gegeben, so existiert dazu eindeutig $N_o \in \mathfrak{N}$ mit $f(N_o)=C_o$, und es existiert eindeutig $[N_o]$ mit $f(N_o)=g(N^*)=C_o$ für alle $N^* \in [N_o]$.

Daraus folgt:

(15) $$N^*(T)=1 \Longleftrightarrow T \in \mathfrak{S}_o \quad \text{, genau für alle } N^* \in [N_o]$$

Def. 18: Analog zu Def. 16 werde zu gegebenen C_o und $\mathfrak{S}_o$ die Menge aller Familien über $\mathfrak{S}_o$ mit $\mathfrak{T}_o$ bezeichnet.

Der folgende Satz stellt nun für beliebiges $C_o \in \mathfrak{C}$ einen Zusammenhang her zwischen Familiensystemen $\mathfrak{T}' \subset \mathfrak{T}_o$ und disjunktiven Partialformen $N^* \in [N_o]=g^{-1}(C_o)$.

Satz 5: Sei ein beliebiges $C_o \in \mathfrak{C}$ gegeben, und sei $\mathfrak{S}_o$ die Menge der zulässigen Terme von C_o. Dann gibt es zu jedem $\mathfrak{T}' \subset \mathfrak{T}_o$ mit $\bigcup\limits_{\mathfrak{Q} \in \mathfrak{T}'} \mathfrak{Q} = \mathfrak{S}_o$ genau ein $N^* \in [N_o]=g^{-1}(C_o)$ und umgekehrt.

Beweis: Jedem $\mathfrak{Q}_\nu \in \mathfrak{T}'$ läßt sich gemäß Lemma 2 eineindeutig eine partielle konjunktive Form F_{J_ν} zuordnen mit $F_{J_\nu}(T)=1 \Longleftrightarrow T \in \mathfrak{Q}_\nu$. Damit ist auch die Zuordnung von $\mathfrak{T}'$ und $N^*(x)=\bigvee\limits_{\nu=1}^{k} F_{J_\nu}(x)$ eineindeutig.

Es ist daher nur noch zu zeigen: $N^* \in g^{-1}(C_o) \Longleftrightarrow \bigcup\limits_{\mathfrak{Q} \in \mathfrak{T}'} \mathfrak{Q} = \mathfrak{S}_o$.

$\bigcup\limits_{\mathfrak{Q} \in \mathfrak{T}'} \mathfrak{Q} = \mathfrak{S}_o \Longleftrightarrow$ genau für alle $T \in \mathfrak{S}_o$ gibt es $\mathfrak{Q}_\nu \in \mathfrak{T}'$ mit $T \in \mathfrak{Q}_\nu$

$\Longleftrightarrow$ genau für alle $T \in \mathfrak{S}_o$ gibt es F_{J_ν} in der Darstellung von N^*, sodaß $F_{J_\nu}(T)=1$

$\Longleftrightarrow N^*(T)=1$ genau für alle $T \in \mathfrak{S}_o$

$\Longleftrightarrow N^* \in g^{-1}(C_o)$

Die Ergebnisse von Lemma 2 und Satz 5 erlauben es, partielle konjunktive Formen durch Familien und disjunktive Partialformen durch Familiensysteme in eineindeutiger Weise zu beschreiben. Demgemäß läßt sich der Begriff der Bewertung übertragen:

Def. 19: a) $F_{J_j} \longleftrightarrow \mathfrak{Q}_j$: $E(\mathfrak{Q}_j) := E(F_{J_j}) = |J_j|$

b) $N_{P^*} \longleftrightarrow \mathfrak{T}'$: $E(\mathfrak{T}') := E(N_{P^*}) = |P^*| - 1 + \sum_{j=1}^{k} |J_j|$,

wobei $N_{P^*}(x) = \bigvee_{j=1}^{k} F_{J_j}(x)$

und $\mathfrak{T}' = \{\mathfrak{Q}_j \mid j=1,\ldots,k\}$ ist.

Damit ergibt sich die zu (13) äquivalente Problemstellung:

(16) Zu der Menge $\mathfrak{F}_o$ der zulässigen Terme von C_o ist ein Familiensystem $\mathfrak{T}' \subset \mathfrak{T}_o$ mit $\bigcup_{\mathfrak{Q}\in\mathfrak{T}'} \mathfrak{Q} = \mathfrak{F}_o$ gesucht, sodaß $E(\mathfrak{T}')$ minimal ist.

Gemäß (16) erweist sich das vorgelegte Minimierungsproblem als Überdeckungsproblem. Zur Lösung müßte zunächst $\mathfrak{T}_o$ bestimmt werden, woraus dann bewertungsminimale Überdeckungssysteme $\mathfrak{T}'$ zu finden sind. Dies ist der prinzipielle Weg; im speziell vorliegenden Fall läßt sich jedoch die Existenz einer Menge $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{T}_o$ nachweisen, für die gilt: Ist $\mathfrak{T}' \subset \mathfrak{T}_o$ bewertungsminimales Überdeckungssystem von $\mathfrak{F}_o$, so ist bereits $\mathfrak{T}' \subset \mathfrak{B}$.

Dieses Familiensystem $\mathfrak{B}$ soll Basis heißen und wird wie folgt definiert:

Def. 20: Sei $\mathfrak{Q} \in \mathfrak{T}_o$; dann soll für $\mathfrak{B}$ gelten:

$\mathfrak{Q} \in \mathfrak{B} \Longleftrightarrow$ es existiere kein $\mathfrak{Q}' \in \mathfrak{T}_o$, $\mathfrak{Q}' \neq \mathfrak{Q}$, sodaß $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{Q}'$.

$\mathfrak{B}$ ist offenbar eindeutig bestimmt: es enthält von allen in $\mathfrak{T}_o$ enthaltenen Inklusionsketten $\mathfrak{Q}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{Q}_t$ die jeweils maximalen Familien $\mathfrak{Q}_t$. Daraus folgt sofort, daß $\mathfrak{B}$ selbst ein Überdeckungssystem von $\mathfrak{F}_o$ ist, daß also gilt:

(17) $$\bigcup_{\mathfrak{Q}\in\mathfrak{B}} \mathfrak{B} = \bigcup_{\mathfrak{Q}\in\mathfrak{T}_o} \mathfrak{B} = \mathfrak{F}_o$$

Im folgenden Kapitel wird im wesentlichen die Darstellung von $\mathfrak{T}_o$ untersucht; es wird sich jedoch zeigen, daß sich insbesondere die Darstellung von $\mathfrak{B}$ in das dabei erhaltene Verfahren harmonisch und ohne Mehraufwand einfügt.

Es ist noch zu zeigen, daß für jedes bewertungsminimale Überdeckungssystem $\mathfrak{T}'$ von $\mathfrak{F}_o$ auch tatsächlich $\mathfrak{T}' \subset \mathfrak{B}$ gilt. Dazu wird zunächst das folgende Lemma bewiesen:

Lemma 3: $\mathfrak{A}_i \subsetneq \mathfrak{A}_j \Longrightarrow E(\mathfrak{A}_i) > E(\mathfrak{A}_j)$

Beweis: Seien F_{J_i} und F_{J_j} die konjunktiven partiellen Formen, zu denen $\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{A}_j$ die zugehörigen Familien sind. Mit $m_\nu = |\mathfrak{A}_\nu|$ und $k_\nu = |J_\nu|$, $\nu = 1,2$, gilt nach (7) und (8): $m_\nu = 2^{n-k_\nu}$.

Man erhält so:
$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_i \subset \mathfrak{A}_j &\Longrightarrow m_i < m_j \\ &\Longrightarrow 2^{n-k_i} < 2^{n-k_j} \\ &\Longrightarrow k_i > k_j \\ &\Longrightarrow E(\mathfrak{A}_i) > E(\mathfrak{A}_j) \end{aligned}$$

Satz 6: Sei $\mathfrak{T}' \subset \mathfrak{T}_o$ ein bewertungsminimales Überdeckungssystem von $\mathfrak{F}_o$. Dann gilt $\mathfrak{T}' \subset \mathfrak{B}$.

Beweis: Annahme: $\mathfrak{T}' \not\subset \mathfrak{B}$

Dann gibt es ein $\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}'$ mit $\mathfrak{A} \notin \mathfrak{B}$. Daraus folgt nach Def. 20: Es gibt ein $\mathfrak{A}^* \in \mathfrak{T}_o$ mit $\mathfrak{A} \subsetneq \mathfrak{A}^*$. Dabei sind zwei Fälle möglich:

1) $\mathfrak{A}^* \in \mathfrak{T}'$

Wegen $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}^*$ gilt für jedes $T \in \mathfrak{A}$ auch $T \in \mathfrak{A}^*$. Daraus folgt, daß bereits $\mathfrak{T}'' = \mathfrak{T}' - \{\mathfrak{A}\}$ ganz $\mathfrak{F}_o$ überdeckt.

Mit $\mathfrak{T}' = \{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k\}$ ist $\mathfrak{T}'' = \{\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k\}$, und man erhält für die Bewertung:

$$E(\mathfrak{T}') = \sum_{i=0}^{k} E(\mathfrak{A}_i) + k \text{ , wobei } \mathfrak{A}_o = \mathfrak{A} \text{ ist}$$

$$E(\mathfrak{T}'') = \sum_{i=1}^{k} E(\mathfrak{A}_i) + k - 1 \text{ .}$$

Es ist also $E(\mathfrak{T}') = E(\mathfrak{T}'') + E(\mathfrak{A}) + 1$

Annahme: $|\mathfrak{A}| = 2^n$

Daraus folgt sofort $\mathfrak{A} = \mathfrak{F}$, sodaß $\mathfrak{A}$ erst recht in $\mathfrak{T}_o \subset \mathfrak{T}$ maximal bezüglich der Inklusion ist.

Es gibt daher auch kein $\mathfrak{A}^* \in \mathfrak{F}_o$ mit $\mathfrak{A} \subsetneq \mathfrak{A}^*$.

Widerspruch !

Somit gilt $|\mathfrak{A}| < 2^n$. Sei F_J die zu $\mathfrak{A}$ gehörende partielle konjunktive Form, $s = |J|$. Dann gilt $|\mathfrak{A}| = 2^{n-s} < 2^n$, also $s > 0$; daraus folgt nach Def.19 $E(\mathfrak{A}) > 0$, d.h. $E(\mathfrak{T}') > E(\mathfrak{T}'')$.

Daher ist $\mathfrak{T}'$ kein bewertungsminimales Überdeckungssystem.

Widerspruch!

2) $\mathfrak{P}^* \in \mathfrak{T}_o - \mathfrak{T}'$

Zu $\mathfrak{T}' = \{\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_k\}$ wird $\mathfrak{T}'' = \{\mathfrak{P}^*, \mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_k\}$ gebildet.
Wegen $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{P}^*$ ist mit $\mathfrak{T}'$ sicher auch $\mathfrak{T}''$ Überdeckungssystem;
zudem gilt nach Lemma 3: $E(\mathfrak{P}) > E(\mathfrak{P}^*)$.
Daraus folgt $E(\mathfrak{T}') > E(\mathfrak{T}'')$, sodaß also $\mathfrak{T}'$ nicht bewertungsminimal ist.
Widerspruch!

Aus 1) und 2) folgt: Es gibt kein $\mathfrak{P}^* \in \mathfrak{T}_o$ mit $\mathfrak{P}^* \supsetneq \mathfrak{P}$.
Also ist $\mathfrak{T}' \subset \mathfrak{B}$.

Abschließend sei noch bemerkt, daß die Basis $\mathfrak{B}$ gerade der Menge der Prinimplikanten entspricht, die man aus der Menge der zulässigen (Min)-Terme gewinnen kann; dies folgt unmittelbar aus Def. 20.

Zudem sieht man aber, daß die Bestimmung von $\mathfrak{B}$ zwar eine nützliche, aber keine notwendige Maßnahme ist; zur Lösung des dem Minimierungsproblem äquivalenten Überdeckungsproblems genügt es zweifellos, $\mathfrak{T}_o$ zu bestimmen.

II) Die Struktur von $\mathcal{S}$ und die Bildung von Familien

In Teil I wurde bereits eine Ordnung für die Terme eingeführt: Jedem Term T_i ist eineindeutig sein Dualwert $d(T_i)$ zugeordnet; dieser Wert wurde zum Index des Terms T_i : $i=d(T_i)$. Man unterscheidet so für beliebiges aber festes $n\in\mathbb{N}$ die 2^n paarweise verschiedenen Terme T_i für $i=0,\ldots,2^n-1$. Es soll nun ein neues, konstruktives Ordnungsprinzip eingeführt werden, aus dem zum einen das obige Prinzip ableitbar ist, und das zum anderen die weiteren Betrachtungen erleichtert.

Für ein festes n haben die Terme die Form $T_i^{(n)}= (t^{(n)}_{i,\,n-1},\ldots,t^{(n)}_{i,o})$ für $i=0,\ldots,2^n-1$. Dabei weist (n) lediglich auf die Dimension hin und entfällt, wenn dieser Bezug unwesentlich ist oder wenn das einmal fest vorgegebene n gemeint ist.
Der Index i hat hier nicht notwendig die Bedeutung des Dualwertes!

Def. 1: Mit der Schreibweise

$$\left.\begin{aligned} T_i^{(k)} &= (t^{(k)}_{i,k-1},\ldots,t^{(k)}_{i,o}) \\ T^{*} &= (t^{(k)}_{i,r},\ldots\ldots,t^{(k)}_{i,o}) \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow T_i^{(k)} = (t^{(k)}_{i,k-1},\ldots,t^{(k)}_{i,r+1},T^{*})$$

soll für $k=1,\ldots,n$ die Ordnung der Terme wie folgt rekursiv erklärt werden:

$k=1$: $T_0^{(1)}= (0)$ — Hier stimmen die Indizes trivialerweise mit den Dualwerten überein.
$T_1^{(1)}= (1)$

$1<k\leqslant n$:
$$T_i^{(k)}= \begin{cases} (0,T_i^{(k-1)}) & \text{für } 0\leqslant i\leqslant 2^{k-1}-1 \\ (1,T^{(k-1)}_{i-2^{k-1}}) & \text{für } 2^{k-1}\leqslant i\leqslant 2^{k}-1 \end{cases}$$

Es muß nun zunächst gezeigt werden, daß zu festem n auch sämtliche 2^n Terme durch Def. 1 genau einmal erfaßt werden. Daß man überhaupt 2^n Terme erhält ist unmittelbar einzusehen. Es bleibt also zu zeigen, daß diese so erhaltenen Terme paarweise verschieden sind.

Bemerkung: Die Beweise der folgenden vorbereitenden Sätze und Lemmata sind in der Diplomarbeit des Verfassers ausführlich ausgeführt und sollen hier nur skizziert werden.

Satz 1: Zu gegebenem n sind die 2^n nach Def. 1 erfaßten Terme paarweise verschieden.

Beweis: (vollst. Ind. über n)
Die Behauptung gilt offenbar für k=1 und sei gültig für alle k mit $1 \leqslant k \leqslant n-1$.
Existieren nun $T_i^{(n)}$ und $T_j^{(n)}$ mit $i \neq j$ aber $T_i^{(n)} = T_j^{(n)}$, so muß nach Def. 1 und Induktions-Annahme jedenfalls o.B.d.A. gelten:
$0 \leqslant i \leqslant 2^{n-1}-1$ und $2^{n-1} \leqslant j \leqslant 2^n-1$.
Daraus folgt nach Def. 1:

$$T_i^{(n)} = (0, T_i^{(n-1)}) \quad \text{und}$$

$$T_j^{(n)} = (1, T_{j-2^{n-1}}^{(n-1)})$$

Wegen der angenommenen Gleichheit folgt daraus 0=1 , Widerspruch

Anschließend wird gezeigt, daß die Indizierung der Terme gemäß Def. 1 der Beziehung $d(T_i)=i$ genügt (vergleiche Teil I, Def. 7) :

Satz 2: Für die gemäß Def. 1 geordneten Terme T_i gilt: $d(T_i^{(n)})=i$.

Beweis: (vollst. Ind. über n)
Die Behauptung gilt für k=1 offenbar nach Def. 1; sie sei zudem gültig für alle k mit $1 \leqslant k \leqslant n-1$.
Für k=n erhält man dann für $T_i^{(n)}$ nach Def. 1 und nach Def. 7 aus Teil I:

a) $0 \leqslant i \leqslant 2^{n-1}-1 \Longrightarrow T_i^{(n)} = (0, T_i^{(n-1)})$

$$\Longrightarrow d(T_i^{(n)}) = d(T_i^{(n-1)}) = i$$

b) $2^{n-1} \leqslant i \leqslant 2^n-1 \Longrightarrow T_i^{(n)} = (1, T_{i-2^{n-1}}^{(n-1)})$

$$\Longrightarrow d(T_i^{(n)}) = 2^{n-1} + d(T_{i-2^{n-1}}^{(n-1)})$$
$$= 2^{n-1} + (i-2^{n-1})$$
$$= i$$

Entsprechend ihrer nun eindeutig festgelegten Ordnung kann man für festes n die 2^n Terme $T_i^{(n)}$, $i=0,\ldots,2^n-1$, untereinander in einer Matrix anordnen, sodaß man für $T_i^{(n)} = (t_{i,n-1}^{(n)}, \ldots, t_{i,0}^{(n)})$ erhält:

(1) $\nu = n-1, \ldots, 0$

$$\begin{array}{l} T_0 \\ T_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_{2^n-1} \end{array} \begin{pmatrix} t_{0,n-1} & \cdots & t_{0,0} \\ t_{1,n-1} & \cdots & t_{1,0} \\ & & \\ & & \\ & & \\ t_{2^n-1,n-1} & \cdots & t_{2^n-1,0} \end{pmatrix}$$

Beispiel für n=3:

$$\begin{array}{l} \nu = 2\ 1\ 0 \\ T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hierbei wurde, da Verwechslungen ausgeschlossen sind, auf "(n)" verzichtet.

Von Interesse sind im folgenden die Spaltenvektoren solcher Matrizen; $a_\nu=(t_{0,\nu},\ldots,t_{2^n-1,\nu})'$ ist ein solcher ν-ter Spaltenvektor.

$\nu=1$

$H_{1,0}=\begin{cases}0 & 0\\ 1 & 0\end{cases}$
$H_{1,1}=\begin{cases}2 & 1\\ 3 & 1\end{cases}$
$H_{1,2}=\begin{cases}4 & 0\\ 5 & 0\end{cases}$
$H_{1,3}=\begin{cases}6 & 1\\ 7 & 1\end{cases}$

Am nebenstehenden Beispiel soll kurz erläutert werden, welcher Aufbau der Spaltenvektoren allgemein nachgewiesen werden wird:
Man erkennt eine periodische Struktur; insbesondere fallen "Halbperioden" auf - Indexmengen, die diese periodische Struktur wesentlich beschreiben. Sie sind nebenstehend für $\nu=1$ hervorgehoben. In augenfälliger Weise kann man 0- und 1-Halbperioden unterscheiden, die in ständigem Wechsel aufeinander folgen:
Für $\nu=1$ sind $H_{1,0}$ und $H_{1,2}$ 0-Halbperioden, und $H_{1,1}$ und $H_{1,3}$ sind 1-Halbperioden.
Diese Begriffe werden natürlich noch näher präzisiert.

Def. 2: Eine Indexmenge $H_\nu=\{i,i+1,..,i+k\}\subset\{0,\ldots,2^n-1\}$ soll genau dann Halbperiode von a_ν oder einfach ν-te Halbperiode heißen, wenn gilt:

1) $t_{i,\nu}=\ldots=t_{i+k,\nu}$
2) $t_{i-1,\nu}\neq t_{i,\nu}$
3) $t_{i+k+1,\nu}\neq t_{i+k,\nu}$

(Die Ungleichungen 2) bzw. 3) sollen für $i=0$ bzw. $i+k=2^n-1$ jedenfalls als erfüllt gelten.)

Man sieht unmittelbar ein, daß sich eine Indexmenge $\{0,\ldots,2^n-1\}$ gemäß Def. 2 stets vollständig in Halbperioden zerlegen läßt, indem man, bei 0 anfangend, fortlaufend für i untersucht, ob $t_i=t_{i-1}$ gilt oder nicht. Im ersten Fall wird die gerade vorliegende Halbperiode um i ergänzt; im zweiten Fall wird die vorliegende Halbperiode durch i-1 beschlossen, und durch i das erste Element der nächsten Halbperiode definiert. Entsprechend dieser Überlegung ist die folgende Definition zu verstehen:

Def. 3: Mit $H_{\nu,r}$ soll diejenige ν-te Halbperiode bezeichnet werden, die in der Aufeinanderfolge aller ν-ten Halbperioden an r-ter Stelle steht.
(Vergleiche dazu das Beispiel auf Seite 25 .)

Bemerkung zur Schreibweise: Im allgemeinen werden zwei zu unterscheidende ν-te Halbperioden gemäß Def. 3 z.B. mit H_{ν,r_1} und H_{ν,r_2} bezeichnet.
Wird dagegen nur irgendeine ν-te Halbperiode betrachtet, so wird auch einfach nur H_ν geschrieben.

Satz 3: Für beliebiges n gilt: $H_{\nu,r}=\{r\cdot 2^\nu+i \mid i=0,\ldots,2^\nu-1\}$; $r=0,\ldots$

Beweis: (vollst. Ind. über n)
Für k=1 ist mit $H_{0,0}=\{0\}$ und $H_{0,1}=\{1\}$ alles erfüllt, und die Behauptung gelte für alle k mit $1\leqslant k\leqslant n-1$.
Für k=n sei dann zunächst

$$0\leqslant j\leqslant 2^{n-1}-1, \text{ also } T_j^{(n)}=(0,T_j^{(n-1)}) .$$

a) $0\leqslant\nu\leqslant n-2$: Die Untersuchung wird auf die Terme $T_j^{(n-1)}$ für $0\leqslant j\leqslant 2^{n-1}-1$, also auf den Fall k=n-1 reduziert.

b) $\nu=n-1$: Durch sukzessive Anwendung von Def. 1 erhält man
$t^{(n)}_{0,n-1}=\ldots=t^{(n)}_{2^{n-1}-1,n-1}=0$ und
$t^{(n)}_{2^{n-1},n-1}=\ldots=t^{(n)}_{2^n-1,n-1}=1$.
Also ist nach Def. 2 $\{0,\ldots 2^{n-1}-1\}$ gerade eine Halbperiode H_{n-1} mit

$$\{0,\ldots 2^{n-1}-1\}=\{r\cdot 2^{n-1}+i \mid i=0,..,2^{n-1}-1\}$$
$$=H_{n-1,r} \text{ mit } r=0 \text{ nach Def. 2}$$
$$=H_{n-1,0}$$

Ganz entsprechend wird im Fall $2^{n-1}\leqslant j\leqslant 2^n-1$ verfahren.

Aus Satz 3 lassen sich leicht einige Folgerungen ziehen:

(2) Mit L_ν werde die Anzahl der Elemente einer ν-ten Halbperiode H_ν bezeichnet. Dann gilt: a) $L_\nu=2^\nu$

b) $L_\nu=2^k \cdot L_{\nu-k}$

(3) Mit $Max(H_{\nu,r})$ bzw. $Min(H_{\nu,r})$ sollen das größte bzw. das kleinste Element der betreffenden Halbperiode bezeichnet werden. Dann gilt:

a) $Max(H_{\nu,r})=(r+1)\cdot 2^\nu-1$

b) $Min(H_{\nu,r})=r\cdot 2^\nu$

c) $Min(H_{\nu,r+1})=1+Max(H_{\nu,r})$

(Hierbei soll o.B.d.A. angenommen werden, daß $H_{\nu,r}$ nicht die letzte ν-te Halbperiode in der Aufeinanderfolge der ν-ten Halbperioden ist.)

(4) Aus (2) und (3) folgt, wie bereits angedeutet:
Die Menge der ν-ten Halbperioden überdeckt die Indexmenge $\{0,\ldots,2^n-1\}$ disjunkt. Wegen $L_\nu=2^\nu$ gibt es daher $2^{n-\nu}$ ν-te Halbperioden $H_{\nu,0},\ldots,H_{\nu,2^{n-\nu}-1}$.

(5) Die Komponenten eines jeden Terms T_i können nur die Werte 0 und 1 annehmen; dies gilt nach (1) auch für die Spaltenvektoren a_ν.
Ist nun $t_{i,\nu}=0$ für ein $i\in H_{\nu,r}$, so nach Def. 2 auch für alle $i\in H_{\nu,r}$. Daher ist auch $t_{Max(H_{\nu,r})}=0$ und nach Def. 2 und (3) also $t_{Min(H_{\nu,r+1})}=1$. Daraus folgt: $t_{j,\nu}=1$ für alle $j\in H_{\nu,r+1}$.
Entsprechend ist dann wieder $t_{\lambda,\nu}=0$ für alle $\lambda\in H_{\nu,r+2}$ usw.
Wegen $T_0=(0,\ldots,0)$ ist sicher $t_{0,\nu}=0$ für alle ν. Das heißt aber $t_{i,\nu}=0$ für alle $i\in H_{\nu,0}$ für alle ν, da ja jedenfalls $0\in H_{\nu,0}$ ist.
Wegen $0\leqslant\nu\leqslant n-1$ ist $n>\nu$; die Anzahl $2^{n-\nu}$ der ν-ten Halbperioden ist also stets gerade. Damit gilt speziell für jede letzte ν-te Halbperiode $H_{\nu,2^{n-\nu}-1}$: $t_{i,\nu}=1$ für alle $i\in H_{\nu,2^{n-\nu}-1}$.

Nach (5) liegt es nahe, 0- und 1-Halbperioden wie folgt zu definieren:

<u>Def. 4:</u> $H_{\nu,r}$ heißt $\begin{matrix}0-\\1-\end{matrix}$ Halbperiode genau dann,

wenn $t_{i,\nu}=\begin{matrix}0\\1\end{matrix}$ für alle $i\in H_{\nu,r}$.

Man erhält damit aus (5) sofort:

(6) a) $H_{\nu,r}$ ist $\begin{matrix}0-\\1-\end{matrix}$Halbperiode $\Longleftrightarrow$ $H_{\nu,r+1}$ ist $\begin{matrix}1-\\0-\end{matrix}$Halbperiode

b) $H_{\nu,r}$ ist $\begin{matrix}0-\\1-\end{matrix}$Halbperiode $\Longleftrightarrow$ $r\equiv\begin{matrix}0\\1\end{matrix}$ (mod 2)

Geeignete Zusammenfassungen von Halbperioden führen auf periodische Strukturen, die jedoch für die speziellen Untersuchungen keine große Bedeutung haben:

Def. 5: Eine Indexmenge $P_\nu = H_{\nu,r} \cup H_{\nu,r+1}$ mit $r \equiv 0 \pmod 2$ soll eine ν-te Periode heißen.

Alle Aussagen über Perioden ergeben sich leicht aus denen über Halbperioden:

(7) Es gibt genau $2^{n-\nu-1}$ ν-te Perioden P_ν ; für die Anzahl p_ν ihrer Elemente gilt: $p_\nu = 2 \cdot L_\nu = L_{\nu+1} = 2^{\nu+1} = 2^k \cdot p_{\nu-k}$.
Die Zerlegung von $\{0,\dots,2^n-1\}$ in ν-te Perioden ist disjunkt.

(8) Werden die Perioden analog den Halbperioden durchgezählt, so erhält man:
$P_{\nu,\rho} = H_{\nu,r} \cup H_{\nu,r+1}$, und es ist $\rho = \frac{r}{2}$, da ja $r \equiv 0 \pmod 2$

Wie man leicht nachprüft, sind ν-te Perioden gerade $(\nu+1)$-te Halbperioden:

(9) $H_{\nu+1,\rho} = H_{\nu,r} \cup H_{\nu,r+1}$, wobei $r \equiv 0 \pmod 2$ und $\rho = \frac{r}{2}$ ist.

Lemma 1: Gegeben sind zwei Spaltenvektoren a_ν, a_μ mit $0 \leq \nu, \mu \leq n-1$.
Dann gilt:
$\nu < \mu \iff$ zu jedem $H_{\nu,r}$ gibt es ein $H_{\mu,s}$, sodaß $H_{\nu,r} \subset H_{\mu,s}$.

Beweis: "$\Longleftarrow$" : $H_{\nu,r} \subset H_{\mu,s} \Longrightarrow L_\nu < L_\mu \Longrightarrow \nu < \mu$

"$\Longrightarrow$" : $\nu < \mu \Longrightarrow L_\nu < L_\mu$

Sei nun zunächst $\mu = \nu+1$:

a) $r \equiv 0 \pmod 2$;
dann ist $\mathrm{Min}(H_{\nu,r}) = \mathrm{Min}(H_{\nu+1,s}) \iff s = \frac{r}{2}$.
Also gibt es $H_{\mu,s}$ mit $\mathrm{Min}(H_{\nu,r}) = \mathrm{Min}(H_{\mu,s})$. (*)
Aus (2) und (3) folgt: $\mathrm{Max}(H_{\nu,r}) = \mathrm{Min}(H_{\nu,r}) + L_\nu - 1$,
und entsprechend für μ.
Damit erhält man:
$$L_\nu < L_\mu \Longrightarrow \mathrm{Max}(H_{\mu,s}) > \mathrm{Max}(H_{\nu,r})$$
$$\Longrightarrow H_{\mu,s} \supset H_{\nu,r} \text{ , nach (*)}$$

b) $r \equiv 1 \pmod 2$;
analog a) kann hier für $s = \frac{r-1}{2}$ gezeigt werden, daß $H_{\mu,s} \supset H_{\nu,r}$.

Aus a) und b) folgt für $\mu = \nu+1$ die Behauptung.
Offenbar gilt:

(**) $(H_{\nu,r} \subset H_{\nu+1,s_1}$ und $H_{\nu+1,s_1} \subset H_{\nu+2,s_2}) \Longrightarrow H_{\nu,r} \subset H_{\nu+2,s_2}$

Durch sukzessive Anwendung von (**) erhält man dann die Gültigkeit der Behauptung für beliebige ν und μ mit $\nu < \mu$.

Lemma 2: Gegeben seien μ_1,μ_2 mit $\mu_1<\mu_2$ und $\mu_1\in H_{\nu-1,r_1}$, $\mu_2\in H_{\nu-1,r_1+2}$; zudem sei $t_{\mu_1,\nu-k}=t_{\mu_2,\nu-k}$ für alle $k=1,\ldots,\nu$.

Dann gilt:

$\mu_1\in H_{\nu-k,r_k}$
$\mu_2\in H_{\nu-k,s_k}$ mit $s_k-r_k=\lambda_k=2^k$, für alle $k=1,\ldots,\nu$

Beweis: (vollst. Ind. über k)

Sei zunächst $\varkappa=1$; nach (6) sind $H_{\nu-1,r_1}$ und $H_{\nu-1,r_1+2}$ Halbperioden gleichen Typs. Also ist $t_{\mu_1,\nu-1}=t_{\mu_2,\nu-1}$, und mit $s_1=r_1+2$ ist die Behauptung erfüllt.

Die Behauptung gelte für alle $\varkappa$ mit $1\leqslant\varkappa\leqslant k$: $\lambda_\varkappa=s_\varkappa-r_\varkappa=2^\varkappa$.

Für $\varkappa=k+1$ erhält man dann:

$$H_{\nu-k,r_k}=H_{\nu-k-1,2r_k}\cup H_{\nu-k-1,2r_k+1} \quad \text{und}$$
$$H_{\nu-k,s_k}=H_{\nu-k-1,2s_k}\cup H_{\nu-k-1,2s_k+1}$$

Nach (6) sind $H_{\nu-k-1,2r_k}$ und $H_{\nu-k-1,2s_k}$ 0-Halbperioden, und $H_{\nu-k-1,2r_k+1}$ und $H_{\nu-k-1,2s_k+1}$ 1-Halbperioden

Wegen $t_{\mu_1,\nu-k}=t_{\mu_2,\nu-k}$ für alle k folgt daraus, daß μ_1 und μ_2 jeweils beide aus den entsprechenden 0-Halbperioden oder aus den entsprechenden 1-Halbperioden sind. Im ersten Fall wären $r_{k+1}=2r_k$ und $s_{k+1}=2s_k$, im zweiten Fall $r_{k+1}=2r_k+1$ und $s_{k+1}=2s_k+1$; jedenfalls gilt damit: $\lambda_{k+1}=s_{k+1}-r_{k+1}=2(s_k-r_k)$

Nach Induktions-Annahme ist $s_k-r_k=2^k$; also folgt: $\lambda_{k+1}=2^{k+1}$.

Damit sind die für das weitere notwendigen Begriffe und Ergebnisse gegeben. Zu untersuchen ist nun, wie Terme und Familien zusammenhängen und wie sich Familien handlich beschreiben lassen. Zum ersten Punkt mag es zunächst genügen, daß wegen $\mathfrak{F}$-$\mathfrak{F}^*$ offenbar zu jedem Term T die korrespondierende einelementige Menge $\{T\}$ existiert. Das heißt:

(10) $$T\in\mathfrak{S}_o \longrightarrow \{T\}\in\mathfrak{T}_o$$

Für den zweiten Punkt ist der Begriff der Verwandschaft von Wichtigkeit:

(11) Sei $F_J \in \mathfrak{F}^*$ mit $J = \{\sigma_{s-1},\ldots,\sigma_o\} \subset \{n-1,\ldots,0\}$.
Wie oben gezeigt wurde, existiert dann zu F_J eindeutig die zugehörige Familie $\mathfrak{Q}$ mit $|\mathfrak{Q}|=2^{n-s}$
Sei nun $J^* = \{n-1,\ldots,0\} - J = \{\nu_{k-1},\ldots,\nu_o\}$, also $k=n-s$.
Dann stimmen die Terme $T_\rho \in \mathfrak{Q}$ genau in den Komponenten $t_{\rho,\xi}$ überein, für die $\xi \in J$ ist. Für die restlichen Komponenten $t_{\rho,\nu}$ mit $\nu \notin J$, d.h. $\nu \in J^*$, gilt also:
Zu jedem $T_\rho \in \mathfrak{Q}$ gibt es ein $T_\sigma \in \mathfrak{Q}$ mit $T_\sigma \neq T_\rho$, sodaß $t_{\rho,\nu} \neq t_{\sigma,\nu}$ für mindestens ein $\nu \in J^*$.
($\mathfrak{Q}$ hat dabei etwa die $2^{n-s}=2^k$ Elemente $T_{\rho_o},\ldots,T_{\rho_{2^k-1}}$.)

Diese Zusammenhänge führen auf die folgenden Definitionen:

Def.:6: Die sämtlichen Terme T_ρ einer zu F_J gehörenden Familien $\mathfrak{Q}$ sollen verwandt heißen; die Menge $J^*=\{n-1,\ldots 0\}-J$ heißt ihre Verwandtschaft $V(\mathfrak{Q})$:
$V(\mathfrak{Q}) = J^* = \{\nu_{k-1},\ldots,\nu_o\}$ für $\mathfrak{Q} = \{T_{\rho_o},\ldots,T_{\rho_{2^k-1}}\}$.

Def. 7: An das in (10) gesagte anschließend ist zu jedem Term T die korrespondierende Familie $\mathfrak{Q}=\{T\}$ mit der Verwandtschaft $V(\mathfrak{Q})=\emptyset$ definiert.

An dem folgenden Beispiel soll die Bedeutung der eingeführten Begriffe erläutert werden:
Ein während eines Minimierungsprozesses gebildeter reduzierter Minterm habe etwa die Form 1 0 - 1 - . Dann deuten die Zeichen "-" auf Zusammenfassungen folgender Minterme hin:

(a)
1 0 1 1 0 } ⟶ 1 0 1 1 - }
1 0 1 1 1 }   } ⟶ 1 0 - 1 -
1 0 0 1 0 } ⟶ 1 0 0 1 - }
1 0 0 1 1 }

Das heißt: 1 0 - 1 - steht für diejenigen vier Minterme,

(b)
1 0 0 1 0
1 0 0 1 1
1 0 1 1 0
1 0 1 1 1

die an den Stellen, die nicht durch "-" gekennzeichnet sind, jeweils gleiche Komponenten haben, jedoch an den mit "-" gekennzeichneten Stellen jede beliebige Kombination zulassen. Dies ist genau der Inhalt dessen, was in (11) und den folgenden Definitionen zum Ausdruck gebracht wurde.

In Familienschreibweise erhält man:

$$1\ 0 - 1 - \longleftrightarrow \mathfrak{Q} = \{T_{18},T_{19},T_{22},T_{23}\} \text{ mit } V(\mathfrak{Q}) = \{2,0\}$$

Da es das Ziel ist, ausgehend von $\mathfrak{F}_0$ das vollständige Familiensystem $\mathfrak{T}_0$ zu bestimmen, müssen Aussagen darüber gemacht werden, wann sich Terme zu Familien und Familien zu umfassenden Familien -Oberfamilien- zusammenfassen lassen.

(12) Zur Vereinfachung soll dabei stets o.B.d.A. für alle betrachteten Familien $\mathfrak{F}$ mit $\mathfrak{F}=\{T_{\sigma_0},\ldots,T_{\sigma_{2k-1}}\}$ und $V(\mathfrak{F})=\{\nu_{k-1},\ldots,\nu_0\}$ gelten:

$$\sigma_0<\ldots<\sigma_{2k-1} \quad \text{und} \quad \nu_{k-1}>\ldots>\nu_0$$

Es wird nun zunächst der einfachste nichttriviale Fall untersucht: $|J^*|=1$, das heißt $J^*=\{\nu\}$. Eine mögliche Familie besteht hierbei etwa aus den beiden Elementen T_{μ_1} und T_{μ_2} mit $t_{\mu_1,\nu}\neq t_{\mu_2,\nu}$ und $t_{\mu_1,k}=t_{\mu_2,k}$ für $0\leq k\leq n-1, \nu\neq k$.

Satz 4: Gegeben sind zwei Terme T_{μ_1} und T_{μ_2} mit $\mu_1<\mu_2$.
Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:
A) $\{T_{\mu_1},T_{\mu_2}\}$ ist Familie mit $V(\{T_{\mu_1},T_{\mu_2}\})=\{\nu\}$
B) Es gibt $H_{\nu+1,r}$ mit $\mu_1\mu_2\in H_{\nu+1,r}$, und es ist $\mu_2=2^\nu+\mu_1$

Beweis: Für den folgenden Beweis soll eine formale Halbperiode $H_{n,o}$ mit $L_n=2^n$ definiert sein, damit die Aussage $\mu_1,\mu_2\in H_{\nu+1,r}$ für alle $\nu=0,\ldots,n-1$ sinnvoll bleibt.
Nach (6) ist $H_{n,o}$ ohnehin 0-Halbperiode, sodaß die Hinzunahme von $H_{n,o}$ lediglich eine Erweiterung aller Terme T_μ um eine führende Null, $t_{\mu,n}=0$, bedeutet. Dies beeinflußt trivialerweise die Untersuchungen nicht.

1) "B) $\Longrightarrow$ A)":
$\mu_2=2^\nu+\mu_1=L_\nu+\mu_1 \Longrightarrow$ μ_1 und μ_2 liegen in zwei verschiedenen, aufeinanderfolgenden ν-ten Halbperioden.
$\Longrightarrow t_{\mu_1,\nu}\neq t_{\mu_2,\nu}$ (a)
Es gibt $H_{\nu+1,r}$ mit $\mu_1,\mu_2\in H_{\nu+1,r}$; daraus folgt:
$t_{\mu_1,\nu+1}=t_{\mu_2,\nu+1}$ (b)
Nach Lemma 1 gilt:
Es existieren Halbperioden H_{ρ,s_ρ} für $\rho=\nu+2,\ldots,n-1$, sodaß $H_{\nu+1,r}\subset H_{\rho,s_\rho}$. Das heißt: $\mu_1,\mu_2\in H_{\rho,s_\rho}$, und daraus folgt: $t_{\mu_1,\rho}=t_{\mu_2,\rho}$ für alle $\rho=\nu+2,\ldots,n-1$ (c)

Andererseits gilt:

$\mu_2=L_\nu+\mu_1 \Longrightarrow \mu_2=2\cdot L_{\nu-1}+\mu_1$, nach (2)

$\Longrightarrow \mu_1$ und μ_2 liegen in zwei verschiedenen $(\nu-1)$-ten Halbperioden $H_{\nu-1,\lambda}$ und $H_{\nu-1,\varkappa}$, wobei offenbar $|\lambda-\varkappa|=2$ ist.

$\Longrightarrow$ $t_{\mu_1,\nu-1}=t_{\mu_2,\nu-1}$, nach (6) (d)

Nach (2) ist weiter $L_{\nu-1}=2^k\cdot L_{\nu-1-k}$, sodaß $\mu_2=2^{k+1}\cdot L_{\nu-1-k}+\mu_1$ ist für $k=1,\ldots,\nu-2$. Entsprechend (d) ist dann auch $t_{\mu_1,k}=t_{\mu_2,k}$ für $k=1,\ldots,\nu-2$ (e)

Aus (a),...,(e) folgt: $t_{\mu_1,\nu}\neq t_{\mu_2,\nu}$ und

$t_{\mu_1,\rho}=t_{\mu_2,\rho}$ für alle $\rho=0,\ldots,n-1$ mit $\rho\neq\nu$.

Daraus folgt nach (11) und Def. 6:
$\{T_{\mu_1},T_{\mu_2}\}$ ist eine Familie mit $V(\{T_{\mu_1},T_{\mu_2}\})=\{\nu\}$.

2) $V(\{T_{\mu_1},T_{\mu_2}\})=\{\nu\} \Longrightarrow$ Es existiert $H_{\nu+1,r}$ mit $\mu_1,\mu_2\in H_{\nu+1,r}$:

<u>Annahme:</u> $\mu_1\in H_{\nu+1,r}$ und $\mu_2\notin H_{\nu+1,r}$.

Nach der Vorbemerkung gilt aber zumindest $\mu_1,\mu_2\in H_{n,o}$, da wegen $L_n=2^n$ $H_{n,o}=\{0,\ldots,2^n-1\}$ ist.

Sei $\rho=\mathrm{Min}\{i \mid$ es gibt $H_{i,s}$ mit $\mu_1,\mu_2\in H_{i,s}\}$, $\nu+2\leqslant\rho\leqslant n$.

Daraus folgt: a) $\mu_1,\mu_2\in H_{\rho,s}$ und

b) $\mu_1\in H_{\rho-1,s^*}$, $\mu_2\notin H_{\rho-1,s^*}$

Wegen $\mu_1<\mu_2$ folgt daraus: $\mu_1\in H_{\rho-1,s^*}$, $\mu_2\in H_{\rho-1,s^*+1}$

Wäre nämlich $\mu_2\in H_{\rho-1,s^*+k}$ mit $k>1$, so wäre $H_{\rho,s}\cap H_{\rho-1,s^*}\neq\emptyset$ und $H_{\rho,s}\cap H_{\rho-1,s^*+k}\neq\emptyset$, da $\mu_1,\mu_2\in H_{\rho,s}$. Das ist aber ein Widerspruch zu (9) !

Aus $\mu_1\in H_{\rho-1,s^*}$ und $\mu_2\in H_{\rho-1,s^*+1}$ folgt damit nach (6):

$t_{\mu_1,\rho-1}\neq t_{\mu_2,\rho-1}$ für $\rho-1\geqslant\nu+1$

Andererseits gilt wegen $V(\{T_{\mu_1}, T_{\mu_2}\})=\{\nu\}$ aber $t_{\mu_1,\rho}=t_{\mu_2,\rho}$ speziell auch für alle ρ mit $\nu+1\leq\rho\leq n-1$ und für $\rho=n$ formal nach Vorbemerkung, Widerspruch!

Also existiert $H_{\nu+1,r}$ mit $\mu_1,\mu_2\in H_{\nu+1,r}$.

3) $(V(\{T_{\mu_1}, T_{\mu_2}\})=\{\nu\}$ und $\mu_1,\mu_2\in H_{\nu+1,r}) \Longrightarrow \mu_2=2^\nu+\mu_1$:

Zunächst gilt:

$$V(\{T_{\mu_1}, T_{\mu_2}\})=\{\nu\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} t_{\mu_1,\nu}\neq t_{\mu_2,\nu} \\ \mu_1,\mu_2\in H_{\nu+1,r} \end{array}\right\} \Longrightarrow \mu_1\in H_{\nu,s} \ , \ \mu_2\in H_{\nu,s+1}$$

Es ist $H_{\nu,s}=H_{\nu-1,s'}\cup H_{\nu-1,s'+1}$ und $H_{\nu,s+1}=H_{\nu-1,s'+2}\cup H_{\nu-1,s'+3}$

Nach (6) gilt dann wegen $t_{\mu_1,\nu-1}=t_{\mu_2,\nu-1}$ entweder

a) $\mu_1\in H_{\nu-1,s'}$ und $\mu_2\in H_{\nu-1,s'+2}$

oder b) $\mu_1\in H_{\nu-1,s'+1}$ und $\mu_2\in H_{\nu-1,s'+3}$

Mit $s''=s'+1$ geht b) über in

b') $\mu_1\in H_{\nu-1,s''}$ und $\mu_2\in H_{\nu-1,s''+2}$

Nun sind mit a) und b') und $t_{\mu_1,\sigma}=t_{\mu_2,\sigma}$ für alle $\sigma=\nu-1,\ldots,0$ die Voraussetzungen von Lemma 2 erfüllt, und es gilt:

$$\left.\begin{array}{l} \mu_1\in H_{\nu-k,r_k} \\ \mu_2\in H_{\nu-k,s_k} \end{array}\right. \quad \text{mit } s_k-r_k=2^k \text{ für } k=1,\ldots,\nu$$

Daraus folgt insbesondere für $k=\nu$: $\mu_1\in H_{0,r_\nu}$, $\mu_2\in H_{0,s_\nu}$ mit $s_\nu-r_\nu=2^\nu$. Wegen $L_0=2^0=1$ gilt dabei:

$$H_{0,r_\nu}=\{\mu_1\} \quad \text{und} \quad H_{0,s_\nu}=\{\mu_2\} \ .$$

$$\Longrightarrow \mu_2-\mu_1 = s_\nu-r_\nu = 2^\nu$$

$$\Longrightarrow \mu_2 = 2^\nu+\mu_1$$

Mit 2) und 3) gilt "A) $\Longrightarrow$ B)", und mit 1) ist dann die Behauptung des Satzes vollständig bewiesen.

Die Aussage dieses Satzes ist, wie sich zeigen wird, auch für den allgemeinen Fall wesentlich, daß nichttriviale Familien zu Oberfamilien zusammengefaßt werden.

In der vorliegenden Formulierung des Satzes ist die Bedeutung der Halbperioden-Struktur für die Familien-Bildung ersichtlich. Durch eine äquivalente Umformung der Aussage B) aus Satz 4 kann man jedoch eine praktisch besser auszuwertende Aussage erhalten.

Lemma 3: Es seien $\mu_1 \in H_{\nu,r}$ und $\mu_2 \in H_{\nu,r+1}$ mit $\mu_2 = 2^\nu + \mu_1$.
Dann gilt:
(Es gibt $H_{\nu+1}$ mit $\mu_1, \mu_2 \in H_{\nu+1}$) $\Longleftrightarrow$ $t_{\mu_1,\nu} = 0$

Beweis: 1) $t_{\mu_1,\nu} = 0 \Longrightarrow H_{\nu,r}$ ist 0-Halbperiode, also $r \equiv 0 \pmod 2$
$\Longrightarrow H_{\nu,r} \cup H_{\nu,r+1} = H_{\nu+1}$ ist $(\nu+1)$-te Halbperiode mit $\mu_1, \mu_2 \in H_{\nu+1}$

2) Annahme: $t_{\mu_1,\nu} = 1$
Dann ist $H_{\nu,r}$ eine 1-Halbperiode, also $r \equiv 1 \pmod 2$.
Daher gilt:
a) $H_{\nu,r} \subset H_{\nu+1,\rho}$ mit $\rho = \frac{r-1}{2}$
b) $H_{\nu,r+1} \subset H_{\nu+1,\rho+1}$
Da die ν-ten Halbperioden disjunkt sind, für alle ν, folgt daraus: Es gibt kein $H_{\nu+1,\rho}$, sodaß $H_{\nu,r} \subset H_{\nu+1,\rho}$ und $H_{\nu,r+1} \subset H_{\nu+1,\rho}$.
Deshalb gibt es in diesem Fall auch kein $H_{\nu+1}$ mit $\mu_1, \mu_2 \in H_{\nu+1}$, Widerspruch!

Aus Satz 4 und Lemma 3 folgt unmittelbar

Satz 5: Gegeben sind zwei Terme T_{μ_1} und T_{μ_2} mit $\mu_1 < \mu_2$.
Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:
A) $\{T_{\mu_1}, T_{\mu_2}\}$ ist Familie mit $V(\{T_{\mu_1}, T_{\mu_2}\}) = \{\nu\}$
B) $t_{\mu_1,\nu} = 0$ und $\mu_2 = 2^\nu + \mu_1$

Daß in Satz 4 bzw. Satz 5 von Termen statt von einelementigen Familien ausgegangen wurde hat einen Grund darin, daß in einem späteren, allgemeineren Satz über Oberfamilien-Bildung der hier vorliegende Trivialfall ohnehin enthalten ist, daß aber andererseits Satz 4 bzw. Satz 5 in der vorliegenden Form dort sehr gut zu verwenden sind.

Die Anwendung von Satz 5 soll nun an einem Beispiel demonstriert werden:

Sei $C_o=(0,1,1,1,0,0,1,0)$ für n=3 gegeben. Man erhält dann das folgende Schema, aus dem diejenigen Terme auf Verwandtschaften zu untersuchen sind, deren Komponenten in der Charakteristik den Wert 1 haben:

μ	t_2	t_1	t_0	C_o
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

Die "gegebenen Terme" aus Satz 5 sind hier offenbar genau die zulässigen Terme, d.h. die T_μ mit $\mu\in\{1,2,3,6\}$.
Man liest nun nach Satz 5, B) aus dem nebenstehenden Schema unmittelbar die Paare (μ_1,ν) ab, die auf Familienbildungen führen:

Dabei wird wie folgt verfahren:

$c_{o,\mu_1}=1$?
↓ ja
$t_{\mu_1,\nu}=0$?
↓ ja
$c_{o,2^\nu+\mu_1}=1$?
↓ ja

Dem Paar (μ_1,ν) wird in der nebenstehenden Matrix eine 1 zugeordnet.

μ_1 \ ν	2	1	0
0			
1		1	
2	1		1
3			
4			
5			
6			
7			

Jede 1 in der nebenstehenden Matrix bezeichnet also ein Paar (μ_1,ν), und dadurch ist die Familie
$\{T_{\mu_1},T_{2^\nu+\mu_1}\}=\{T_{\mu_1},T_{\mu_2}\}$
mit der Verwandtschaft $V=\{\nu\}$ gegeben.

Grundsätzlich ist bis hierher die nebenstehende Matrix eigentlich überflüssig. Es wird sich jedoch später zeigen, daß sie als "Vergleichsmatrix NY" eine wesentliche Rolle spielt *) .

Für das Beispiel erhält man nun sofort:

$$\mathfrak{A}_1=\{T_1,T_3\} \text{ mit } V(\mathfrak{A}_1)=\{1\}$$
$$\mathfrak{A}_2=\{T_2,T_6\} \text{ mit } V(\mathfrak{A}_2)=\{2\}$$
$$\mathfrak{A}_3=\{T_2,T_3\} \text{ mit } V(\mathfrak{A}_3)=\{0\}$$

Der Vorteil dieses Verfahrens liegt in der gezielten Suche nach Termen, die zueinander verwandt sind. Dies wird sich insbesondere auch bei der Bildung größerer Oberfamilien wesentlich auswirken.

*) Die einmal aufgestellte Matrix NY ist auch für alle folgenden Oberfamilien-Bildungen maßgebend. Sie gibt zudem eine obere Schranke für die Zahl der auf jeder Vergleichsstufe notwendigen Vergleiche.

Ein Punkt, der sofort aus Satz 5 folgt, soll noch einmal explizit formuliert werden, um den Zugriff zu erleichtern:

(13) Zu jedem Term T_{μ_1} gibt es für jedes ν höchstens einen weiteren Term T_{μ_2}, sodaß $V(\{T_{\mu_1},T_{\mu_2}\})=\{\nu\}$ ist.

Es sei nun eine Familie $\mathfrak{F}=\{T_{\sigma_o},\ldots,T_{\sigma_{2^k-1}}\}$ gegeben mit $V(\mathfrak{F})=\{\nu_{k-1},\ldots,\nu_o\}$.

Mit $J=\{n-1,\ldots,0\}-V(\mathfrak{F})$ erhält man dann nach Satz 2:

$$(14)\qquad \sigma_i=d(T_{\sigma_i})=\sum_{j=0}^{n-1} t_{\sigma_i,j}\cdot 2^j = \underbrace{\sum_{\lambda=0}^{k-1} t_{\sigma_i,\nu_\lambda}\cdot 2^{\nu_\lambda}}_{d_i^*} + \underbrace{\sum_{j\in J} t_{\sigma_i,j}\cdot 2^j}_{K_i}$$

Nach (11) ist $t_{\sigma_o,j}=\ldots=t_{\sigma_{2^k-1},j}$ für alle $j\in J$, also ist auch $K_0=\ldots=K_{2^k-1}=K$. Damit erhält man:

(15) $\sigma_{i_1}<\sigma_{i_2} \Longrightarrow d^*_{i_1}<d^*_{i_2}$, also nach (12): $d^*_o<\ldots<d^*_{2^k-1}$.

Ganz analog zu (1) lassen sich nun die Terme von $\mathfrak{F}$ in einer Matrix anordnen; es liegt auf der Hand, da dieser Übergang zu Matrizen nur das "Hinschreiben" der Familie bedeutet, daß die Strukturen dieser Matrizen eineindeutig den Strukturen der entsprechenden Familien entsprechen. Man kann also andererseits aus der besonderen Struktur einer vorliegenden Matrix schließen, ob die zugehörige Term-Menge Familie ist. (Vergleiche dazu auch Teil V .) Die folgenden Beweise sind mithin im wesentlichen so angelegt, daß untersucht wird, wann sich "Familien-Matrizen" zu "Oberfamilien-Matrizen" zusammenfassen lassen und entsprechend für Zerlegungen.

(16) Die obige Familie $\mathfrak{F}$ liefert die folgende Matrix:

$$\begin{pmatrix} t_{\sigma_o,n-1} & \cdots & t_{\sigma_o,0} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{\sigma_{2^k-1},n-1} & \cdots & t_{\sigma_{2^k-1},0} \end{pmatrix}$$

Vertauscht man die Spalten dieser Matrix so, daß einerseits alle Spalten mit Indizes $\nu\in V(\mathfrak{F})$ und andererseits alle Spalten mit Indizes $j\in J$ zusammengefaßt nebeneinander stehen, so erhält man, die unter (17) stehende Matrix.

(17)
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} t_{\sigma_0,j_1} & \cdots & t_{\sigma_0,j_\varkappa} & t_{\sigma_0,\nu_{k-1}} & \cdots & t_{\sigma_0,\nu_0} \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ t_{\sigma_{2^k-1},j_1} & \cdots & t_{\sigma_{2^k-1},j_\varkappa} & t_{\sigma_{2^k-1},\nu_{k-1}} & \cdots & t_{\sigma_{2^k-1},\nu_0} \end{array}\right) = \mathfrak{M}$$

Dabei ist $J=\{j_1,\ldots,j_\varkappa\}$.

Mit den teilweisen Zeilenvektoren $Z^*_{\sigma_i}=(t_{\sigma_i,j_1},\ldots,t_{\sigma_i,j_\varkappa})$ und $Z^{**}_{\sigma_i}=(t_{\sigma_i,\nu_{k-1}},\ldots,t_{\sigma_i,\nu_0})$ erhält man daraus:

(18)
$$\mathfrak{M} = \left(\begin{array}{c|c} Z^*_{\sigma_0} & Z^{**}_{\sigma_0} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ Z^*_{\sigma_{2^k-1}} & Z^{**}_{\sigma_{2^k-1}} \end{array}\right) = \left(\mathfrak{M}^* \mid \mathfrak{M}^{**}\right)$$

Wegen $t_{\sigma_0,j}=\ldots=t_{\sigma_{2^k-1},j}$ für alle $j\in J$ gilt zum einen $Z^*_{\sigma_0}=\ldots=Z^*_{\sigma_{2^k-1}}$; dafür soll daher auch kurz Z^*_σ geschrieben werden. Zum anderen erhält man daraus für die $Z^{**}_{\sigma_i}$: Da alle T_{σ_i} paarweise verschieden sind, die $Z^*_{\sigma_i}$ aber untereinander gleich sind, müssen jedenfalls die $Z^{**}_{\sigma_i}$ paarweise verschieden sein. Zudem läßt sich aus (14) und (15) herleiten: $i_1<i_2 \Longrightarrow d(Z^{**}_{\sigma_{i_1}}) < d(Z^{**}_{\sigma_{i_2}})$, wobei d gemäß Teil I Def. 7 auf die k-stelligen Dualzahlen $Z^{**}_{\sigma_i}$ angewendet wird. Da aber die 2^k k-stelligen Dualzahlen eindeutig bestimmt sind, erhält man mithin $d(Z^{**}_{\sigma_i})=i$. Jeder Zeilenvektor $Z^{**}_{\sigma_i}$ von $\mathfrak{M}^{**}$ ist also gerade durch die Dualzahldarstellung von i gegeben, d.h. $\mathfrak{M}^{**}$ hat die Struktur der durch (1) gegebenen Matrix, wobei hier lediglich k für n zu setzen ist. Von dieser Eigenschaft von $\mathfrak{M}^{**}$ wird später noch Gebrauch gemacht werden.

$\mathfrak{M}$ läßt damit die folgende Gestalt erkennen:

(19)
$$\mathfrak{M} = \begin{array}{c|cccc|c} & \nu_{k-1} & \nu_{k-2} & \cdots & \nu_1 & \nu_0 & \\ \hline \cdot & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \sigma_0 \\ \cdot & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \sigma_1 \\ Z^*_\sigma & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \sigma_{2^k-2} \\ \cdot & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \sigma_{2^k-1} \end{array}$$

Es folgen einige einfache Aussagen über die Relationen zwischen Familien:

Lemma 4: Seien $\mathfrak{L}_\sigma, \mathfrak{L}_\rho$ Familien mit $\mathfrak{L}_\sigma \neq \mathfrak{L}_\rho$ und $V(\mathfrak{L}_\sigma)=V(\mathfrak{L}_\rho)$.
Dann gilt: $\mathfrak{L}_\sigma \cap \mathfrak{L}_\rho = \emptyset$.

Beweis: Aus $V(\mathfrak{L}_\sigma)=V(\mathfrak{L}_\rho)$ folgt sofort $|\mathfrak{L}_\sigma|=|\mathfrak{L}_\rho|$ und $\mathfrak{M}^{**}_\sigma = \mathfrak{M}^{**}_\rho$, wenn $\mathfrak{M}_\sigma$ und $\mathfrak{M}_\rho$ die zugehörigen Matrizen sind.

Annahme:
$\mathfrak{L}_\sigma \cap \mathfrak{L}_\rho \neq \emptyset$; dann gibt es $T_{\sigma_i} \in \mathfrak{L}_\sigma$ und $T_{\rho_j} \in \mathfrak{L}_\rho$, sodaß $T_{\sigma_i} = T_{\rho_j}$.
Damit ist aber auch $Z^*_{\sigma_i} = Z^*_{\rho_j}$, also nach den obigen Überlegungen sogar $Z^*_\sigma = Z^*_\rho$. Daraus folgt $\mathfrak{M}^*_\sigma = \mathfrak{M}^*_\rho$, sodaß insgesamt gilt: $\mathfrak{M}_\sigma = \mathfrak{M}_\rho$. Das heißt aber offenbar $\mathfrak{L}_\sigma = \mathfrak{L}_\rho$, Widerspruch!

Lemma 5: Seien $\mathfrak{L}_\sigma, \mathfrak{L}_\rho$ Familien mit $V(\{T_{\sigma_o}, T_{\rho_o}\})=\{\nu\} \neq \emptyset$.
Dann ist $\mathfrak{L}_\sigma \neq \mathfrak{L}_\rho$.

Beweis: Aus $V(\{T_{\sigma_o}, T_{\rho_o}\})=\{\nu\}$ folgt $T_{\sigma_o} \neq T_{\rho_o}$. Daher ist auch $\sigma_o \neq \rho_o$, also o.B.d.A. $\sigma_o < \rho_o$. Nach (12) folgt daraus $\sigma_o < \rho_i$ für alle i . Damit gilt $T_{\sigma_o} \notin \mathfrak{L}_\rho$ und somit $\mathfrak{L}_\sigma \neq \mathfrak{L}_\rho$.

Lemma 6: Seien $\mathfrak{L}_\sigma$ und $\mathfrak{L}_\rho$ Familien mit $\mathfrak{L}_\sigma \neq \mathfrak{L}_\rho$, $V(\mathfrak{L}_\sigma)=V(\mathfrak{L}_\rho)=V$; weiter gebe es $T_{\sigma_i} \in \mathfrak{L}_\sigma$ und $T_{\rho_j} \in \mathfrak{L}_\rho$ derart, daß $V(\{T_{\sigma_i}, T_{\rho_j}\})=\{\nu\}$ ist.
Dann gilt: $\nu \notin V$

Beweis: Annahme: $\nu \in V$
Da sich T_{σ_i} und T_{ρ_j} genau in der ν-ten Komponente unterscheiden, ist dann jedenfalls $Z^*_\sigma = Z^*_\rho$; analog dem Beweis zu Lemma 5 folgt daraus $\mathfrak{L}_\sigma = \mathfrak{L}_\rho$, Widerspruch!

Die Aussage des eben geführten indirekten Beweises soll noch einmal gesondert formuliert werden:

Lemma 7: Sind $\mathfrak{A}_\sigma, \mathfrak{A}_\rho$ Familien mit $V(\mathfrak{A}_\sigma)=V(\mathfrak{A}_\rho)=V$, und gibt es T_{σ_i}, T_{ρ_j} mit $V(\{T_{\sigma_i}, T_{\rho_j}\})=\{\nu\}$, sodaß $\nu \in V$ gilt, dann ist $\mathfrak{A}_\sigma=\mathfrak{A}_\rho$.

Lemma 8: Es seien wieder $\mathfrak{A}_\sigma$ und $\mathfrak{A}_\rho$ Familien mit $\mathfrak{A}_\sigma \neq \mathfrak{A}_\rho$ und $V(\mathfrak{A}_\sigma)=V(\mathfrak{A}_\rho)=V$. Weiter gebe es wie oben T_{σ_i}, T_{ρ_j} mit $V(\{T_{\sigma_i}, T_{\rho_j}\})=\{\nu\}$. Dann gilt:

a) $\nu \notin V$

b) $i=j$

c) $V(\{T_{\sigma_j}, T_{\rho_j}\})=\{\nu\}$ für alle $j=0,\ldots,2^k-1$ $(k=|V|)$

Beweis: Zu a): Folgt unmittelbar aus Lemma 6

Zu b): Annahme: $i \neq j$

Dann unterscheiden sich $Z^{**}_{\sigma_i}$ und $Z^{**}_{\rho_j}$ in mindestens einer δ-ten Komponente mit $\delta \in V$.

Wegen $V(\{T_{\sigma_i}, T_{\rho_j}\})=\{\nu\}$ und $\nu \notin V$ unterscheiden sich zudem $Z^{*}_{\sigma_i}$ und $Z^{*}_{\rho_j}$ in der ν-ten Komponente; wegen $\nu \notin V$ ist dabei $\nu \neq \delta$.

Daher sind T_{σ_i} und T_{ρ_j} in mindestens 2 Komponenten voneinander verschieden, nach (11) also auch nicht verwandt bezüglich ν, Widerspruch !

Zu c): Sei $j \in \{0,\ldots,2^k-1\}$; wegen der Gleichheit der Verwandtschaften ist $\mathfrak{M}^{**}_\sigma = \mathfrak{M}^{**}_\rho$, also auch $Z^{**}_{\sigma_i}=Z^{**}_{\rho_j}$. (*)

Andererseits ist nach (19) $Z^{*}_{\sigma_j}=Z^{*}_{\sigma_i}$ und $Z^{*}_{\rho_j}=Z^{*}_{\rho_i}$, und $Z^{*}_{\sigma_i}$ und $Z^{*}_{\rho_i}$ unterscheiden sich wegen $V(\{T_{\sigma_i}, T_{\rho_i}\})=\{\nu\}$ nur in der ν-ten Komponente. Dies gilt damit auch für $Z^{*}_{\sigma_j}$ und $Z^{*}_{\rho_j}$, sodaß nach (*) T_{σ_j} und T_{ρ_j} sich überhaupt nur in der ν-ten Komponente unterscheiden. Das heißt aber nach (11):

$V(\{T_{\sigma_j}, T_{\rho_j}\})=\{\nu\}$.

Satz 6: $\mathfrak{S}_\sigma, \mathfrak{S}_\rho$ seien Familien mit $V(\mathfrak{S}_\sigma)=V(\mathfrak{S}_\rho)=\{\nu_{k-1},\dots,\nu_o\}=V$ und $V(\{T_{\sigma_o}, T_{\rho_o}\})=\{\nu\}$.

Dann ist $\mathfrak{S}_\pi=\mathfrak{S}_\sigma \cup \mathfrak{S}_\rho$ eine Familie mit den Eigenschaften

1) $\mathfrak{S}_\sigma, \mathfrak{S}_\rho \subsetneq \mathfrak{S}_\pi$

2) $\nu \notin V$

3) $V(\mathfrak{S}_\pi)=\{\nu;\nu_{k-1},\dots,\nu_o\}$ (Hierbei soll "$\nu;\nu_{k-1},\dots$" andeuten, daß nicht $\nu>\nu_{k-1}$ gelten muß.)

Beweis: Aus den gegebenen Voraussetzungen folgt nach Lemma 5, Lemma 4 und Lemma 6 (in dieser Reihenfolge) : $\nu \notin V$.
Damit ist 2) bewiesen.
Wegen $\mathfrak{S}_\sigma \cap \mathfrak{S}_\rho = \emptyset$ nach Lemma 4 gilt auch 1) sofort.

Es bleibt daher noch zu zeigen, daß $\mathfrak{S}_\pi$ Familie mit der Eigenschaft 3) ist:

Wegen der Gleichheit der Verwandtschaften gilt: $\mathfrak{M}_\sigma^{**}=\mathfrak{M}_\rho^{**}$ (a

Wäre nun $\sigma_o=\rho_o$, so auch $T_{\sigma_o}=T_{\rho_o}$, also $Z^*_{\sigma_o}=Z^*_{\rho_o}$ und daher sogar $Z^*_\sigma=Z^*_\rho$. Daraus folgt nach (18) und (19) mit (a) : $\mathfrak{M}_\sigma=\mathfrak{M}_\rho$, d.h. $\mathfrak{S}_\sigma=\mathfrak{S}_\rho$, Widerspruch!

Sei also o.B.d.A. $\sigma_o < \rho_o$; nach Satz 5 ist dann $t_{\sigma_o,\nu}=0$ und $t_{\rho_o,\nu}=1$, sodaß nach (18) und (19) sogar gilt:

$$t_{\sigma_i,\nu}=0 \quad \text{und} \quad t_{\rho_i,\nu}=1 \quad \text{für alle } i=0,\dots,2^k-1 \qquad (b$$

Es wird nun die Matrix $\mathfrak{M}_\pi$ aufgestellt, die aus $\mathfrak{M}_\sigma$ und $\mathfrak{M}_\rho$ durch Untereinanderschreiben entsteht und offenbar der Menge $\mathfrak{S}_\pi$ entspricht.
Zur Abkürzung werde mit $\mathfrak{M}^{(k)}$ die Matrix bezeichnet, deren Zeilen gerade die k-stelligen Dualzahlen $0,\dots,2^k-1$ in ihrer natürlichen Reihenfolge sind. $\mathfrak{M}^{(k)}$ hat also die Struktur der in (1) gegebenen Matrix, und nach (18) bzw. (19) gilt wegen (a): $\mathfrak{M}_\sigma^{**}=\mathfrak{M}_\rho^{**}=\mathfrak{M}^{(k)}$.

Damit erhält man für $\mathfrak{M}_\pi$ nach b) :

$$\mathfrak{M}_\pi = \left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{ccccc} & & \overset{\nu}{\downarrow} & & \\ t_{\sigma_o,j_1} & \cdots & 0 & \cdots & t_{\sigma_o,j_\varkappa} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ t_{\sigma_{2^k-1},j_1} & \cdots & 0 & \cdots & t_{\sigma_{2^k-1},j_\varkappa} \end{array} & \mathfrak{M}^{(k)} \\ \hline \begin{array}{ccccc} t_{\rho_o,j_1} & \cdots & 1 & \cdots & t_{\rho_o,j_\varkappa} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ t_{\rho_{2^k-1},j_1} & \cdots & 1 & \cdots & t_{\rho_{2^k-1},j_\varkappa} \end{array} & \mathfrak{M}^{(k)} \end{array}\right)$$

Hierbei ist $\{j_1,\ldots,j_\varkappa\}=\{n-1,\ldots,0\}-V$.

Nach Def. 1 und Satz 1, Satz 2 gilt nun:

$$\begin{array}{c} \nu \quad \nu_{k-1}\cdots\nu_0 \\ \left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} & \mathfrak{M}^{(k)} \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} & \mathfrak{M}^{(k)} \end{array}\right) \end{array} = \mathfrak{M}^{(k+1)} \qquad \text{(c)}$$

Das heißt: Die so gebildete Matrix hat nur paarweise verschiedene Zeilenvektoren; diese werden mit $Z^{**}_{\pi_i}$ bezeichnet. (d)

Wegen $V(\{T_{\sigma_o},T_{\rho_o}\})=\{\nu\}$ unterscheiden sich T_{σ_o} und T_{ρ_o} nur genau in der ν-ten Komponente; dies gilt damit auch für $Z^*_{\sigma_o}$ und $Z^*_{\rho_o}$, also genereli für Z^*_σ und Z^*_ρ .

Daraus folgt: Die in $\mathfrak{M}_\pi$ links stehenden Zeilen sind, um die ν-te Komponente reduziert, untereinander alle gleich; dafür soll stellvertretend Z^*_π gesetzt werden. (e)

Man erhält so äquivalente Umformungen von $\mathfrak{M}_\pi$ (die wieder $\mathfrak{M}_\pi$ genannt werden) :

$$\mathfrak{M}_\pi = \begin{pmatrix} \cdot & | & \\ \cdot & | & \\ Z^*_\pi & | & \mathfrak{M}^{(k+1)} \\ \cdot & | & \\ \cdot & | & \end{pmatrix} \overset{\nu;\nu_{k-1}\cdots\nu_0}{=} \begin{pmatrix} & | & \\ & | & \\ \mathfrak{M}^*_\pi & | & \mathfrak{M}^{**}_\pi \\ & | & \\ & | & \end{pmatrix} \begin{matrix} \pi_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \pi_{2^{k+1}-1} \end{matrix}$$

Nach (c),(d) und (e) sind alle Zeilen von $\mathfrak{M}^{**}_\pi$ paarweise verschieden, alle Zeilen von $\mathfrak{M}^*_\pi$ untereinander gleich. Da zudem $\mathfrak{M}^{**}_\pi = \mathfrak{M}^{(k+1)}$ ist, sieht man nach (11) sofort, daß $\mathfrak{M}_\pi$ Matrix einer Familie ist. Mithin ist $\mathfrak{F}_\pi$ Familie, und man liest $V(\mathfrak{F}_\pi)=\{\nu;\nu_{k-1},\ldots,\nu_0\}$ unmittelbar aus (c) und der letzten Darstellung von $\mathfrak{M}_\pi$ ab.
(In dieser Darstellung wird im allgemeinen $i_1<i_2 \longrightarrow \pi_{i_1} \lessdot \pi_{i_2}$ nicht gelten, entsprechend für die ν; dies spielt aber für die zugehörige Familie offenbar keine Rolle und läßt sich durch geeignete Spalten- und Zeilen-Vertauschungen leicht ändern.)

Die Aussage dieses Satzes 6 gestattet es also, zwei den genannten Bedingungen genügende Familien zu einer Oberfamilie zusammenzufassen. Es wird sich im folgenden zeigen, daß diese Bedingungen auch hinreichend sind.
Damit zeigt sich die oben ausgesprochene Bedeutung von Satz 5: Der wesentliche Teil der Untersuchung besteht in der Prüfung von "$V(\{T_{\sigma_o}, T_{\rho_o}\})=\{\nu\}$", und hierüber macht gerade Satz 5 eine notwendige und hinreichende Aussage.

Zunächst wir nun im folgenden Satz gezeigt, daß sich jede Familie mit mehr als einem Element aus jeweils zwei geeigneten kleineren Familien gemäß Satz 6 aufbauen läßt. Damit ist es dann erstens möglich zu zeigen, daß nach Satz 6 zu gegebenem $\mathfrak{F}_o$ rekursiv $\mathfrak{T}_o$ bestimmt werden kann; zweites läßt sich damit in einem weiteren Satz nachweisen, daß die Bedingungen von Satz 6 notwendig und hinreichend sind.

Satz 7: Sei $\mathfrak{L}_\pi=\{T_{\pi_0},\ldots,T_{\pi_{2k+1-1}}\}$ eine Familie mit $V(\mathfrak{L}_\pi)=\{\nu_k,\ldots,\nu_0\}$ . .

Dann gibt es zu jedem $\nu\in V(\mathfrak{L}_\pi)$ genau eine Zerlegung von $\mathfrak{L}_\pi$ in zwei Teilfamilien $\mathfrak{L}_\sigma=\{T_{\sigma_0},\ldots,T_{\sigma_{2^k-1}}\}$ und $\mathfrak{L}_\rho=\{T_{\rho_0},\ldots,T_{\rho_{2^k-1}}\}$, sodaß $V(\mathfrak{L}_\sigma)=V(\mathfrak{L}_\rho)=V(\mathfrak{L}_\pi)-\{\nu\}$ ist mit $\{\nu\}=V(\{T_{\sigma_o},T_{\rho_o}\})$.

(Im weiteren sei $V(\mathfrak{L}_\sigma)$ durch V_σ bezeichnet usw.)

Beweis: 1) Es existiert eine solche Zerlegung:
Nach (19) ist die Matrix $\mathfrak{M}_\pi$ von $\mathfrak{L}_\pi$ gegeben durch:

$$\mathfrak{M}_\pi=\begin{array}{c} \cdots\ \nu_k\ \nu_{k-1}\ \cdots\ \nu_1\ \nu_0 \\ \left(\begin{array}{c|ccccc} & k & k-1 & \ldots & 1 & 0 \\ \hline \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ Z^*_\pi & & \mathfrak{M}^{(k+1)} & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \pi_{2^k-1} \\ \pi_{2^k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \pi_{2^{k+1}-1} \end{array} = \left(\mathfrak{M}^*_\pi \mid \mathfrak{M}^{**}_\pi\right)$$

Dabei ist, wie im Beweis zu Satz 6, $\mathfrak{M}^{(k+1)}$ die Matrix der 2^{k+1} (k+1)-stelligen Dualzahlen. (In $\mathfrak{M}^{(k+1)}$ gilt damit natürlich die untere der beiden Indizierungen: k,...,0. Damit ist auch der Übergang von $\nu_\varkappa$ zu $\varkappa$ klar, der im folgenden durchgeführt wird.) $\mathfrak{M}^{(k+1)}$ ist also eine Matrix der in (1) definierten Art und besitzt die gleichen Strukturen. Den (k+1)-stelligen Termen in (1) entsprechen hier die (k+1)-stelligen Zeilenvektoren $Z^{**}_{\pi_i}$; für jedes $\nu_\varkappa\in V_\pi$ ist in $\mathfrak{M}^{(k-1)}$ der $\varkappa$-te Zeilenvektor $a_\varkappa$ definiert, und es lassen sich mithin alle Aussagen über Halbperioden-Strukturen übertragen.
Sei nun $\nu_\varkappa\in V_\pi$ beliebig aber fest gewählt. Dann lassen sich nach Satz 5 die $Z^{**}_{\pi_i}$ genau zu zweielementigen Familien bezüglich $\varkappa$ zusammenfassen: $V(\{Z^{**}_{\pi_i},Z^{**}_{\pi_{i+2^\varkappa}}\})=\{\varkappa\}$.

Das heißt:

(*) Zu jedem $Z^{**}_{\pi_i}$ mit $z_{\pi_i,\varkappa}=0$ existiert genau $Z^{**}_{\pi_{i+2^\varkappa}}$ mit $z_{\pi_{i+2^\varkappa}}=1$, und dies ist die einzige Komponente, in der sich $Z^{**}_{\pi_i}$ und $Z^{**}_{\pi_{i+2^\varkappa}}$ unterscheiden.

Man ordnet nun alle $Z^{**}_{\pi_i}$ mit $z_{\pi_i,\varkappa}=0$ nach aufsteigenden Indizes in einer Matrix $\tilde{\mathfrak{M}}^{**}_{\sigma}$, die mit $z_{\pi_i,\varkappa}=1$ entsprechend in einer Matrix $\tilde{\mathfrak{M}}^{**}_{\rho}$ an. Es ist klar, daß $\tilde{\mathfrak{M}}^{**}_{\sigma}$ und $\tilde{\mathfrak{M}}^{**}_{\rho}$ jeweils gerade 2^k Zeilenvektoren enthalten.

Man erhält:

$$\tilde{\mathfrak{M}}^{**}_{\sigma}=\begin{array}{c}\varkappa\ ;\ k,..,\varkappa{+}1,\varkappa{-}1,..,0\\ \left(\begin{array}{c|c} 0 & Z^{**}_{\sigma_0}\\ \vdots & \vdots \\ 0 & Z^{**}_{\sigma_{2^k-1}}\end{array}\right)\end{array},\quad \tilde{\mathfrak{M}}^{**}_{\rho}=\begin{array}{c}\varkappa\ ;\ k,..,\varkappa{+}1,\varkappa{-}1,..,0\\ \left(\begin{array}{c|c} 1 & Z^{**}_{\rho_0}\\ \vdots & \vdots \\ 1 & Z^{**}_{\rho_{2^k-1}}\end{array}\right)\end{array}$$

Mit den Bezeichnungen

$$\tilde{\mathfrak{M}}^{**}_{\sigma}=\left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \vdots & \mathfrak{M}^{**}_{\sigma}\\ 0 & \end{array}\right)\quad\text{und}\quad \tilde{\mathfrak{M}}^{**}_{\rho}=\left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \vdots & \mathfrak{M}^{**}_{\rho}\\ 1 & \end{array}\right)$$

erhält man schließlich die folgende Matrix, die durch Vertauschen von Spalten untereinander und Zeilen untereinander aus $\mathfrak{M}_\pi$ hervorgegangen ist (und natürlich ebenso wie diese $\mathfrak{L}_\pi$ beschreibt):

$$\tilde{\mathfrak{M}}_{\pi}=\begin{array}{c}\nu_\varkappa\\ \left(\begin{array}{c|c|c} \cdot & 0 & \\ Z^{*}_{\pi} & \vdots & \mathfrak{M}^{**}_{\sigma}\\ \cdot & 0 & \\ \hline \cdot & 1 & \\ & \vdots & \\ Z^{*}_{\pi} & \cdot & \mathfrak{M}^{**}_{\rho}\\ \cdot & 1 & \end{array}\right)\end{array}\begin{array}{l}\sigma_0\\ \cdot\\ \cdot\\ \sigma_{2^k-1}\\ \rho_0\\ \cdot\\ \cdot\\ \rho_{2^k-1}\end{array}$$

Mit $Z^*_{\sigma_i}=(Z^*_\pi,0)$ und $Z^*_{\rho_i}=(Z^*_\pi,1)$ zerfällt dann $\widetilde{\mathfrak{M}}_\pi$, also auch $\mathfrak{M}_\pi$, in die folgenden beiden Teilmatrizen $\mathfrak{M}_\sigma$ und $\mathfrak{M}_\rho$, die ihrerseits zwei Teilfamilien $\mathfrak{S}_\sigma$ und $\mathfrak{S}_\rho$ von $\mathfrak{S}_\pi$ beschreiben:

$$\mathfrak{M}_\sigma = \left(\begin{array}{c|c} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ Z^*_{\sigma_i} & Z^{**}_{\sigma_i} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{array}\right) \qquad \mathfrak{M}_\rho = \left(\begin{array}{c|c} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ Z^*_{\rho_i} & Z^{**}_{\rho_i} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{array}\right)$$

Wegen $Z^*_{\pi_0}=\ldots=Z^*_{\pi_{2^{k+1}-1}}=Z^*_\pi$ sind nun auch alle $Z^*_{\sigma_i}$ untereinander gleich; und da alle $Z^{**}_{\pi_i}$ für $i=0,\ldots,2^{k+1}-1$ untereinander paarweise verschieden waren, gilt dies nach der durchgeführten Konstruktion offenbar auch für die $Z^{**}_{\sigma_i}$. Zudem enthält kein $Z^{**}_{\sigma_i}$ eine $\nu_\varkappa$-te Komponente, also eine Komponente, deren Spaltenindex in der Matrix $\mathfrak{M}_\pi$ $\nu_\varkappa$ gewesen wäre.

Analoge Aussagen erhält man für $\mathfrak{M}_\rho$, sodaß insgesamt gilt:

1) $\mathfrak{M}_\sigma$ entspricht einer Familie $\mathfrak{S}_\sigma$ mit $V_\sigma=V_\pi-\{\nu_\varkappa\}$

2) $\mathfrak{M}_\rho$ entspricht einer Familie $\mathfrak{S}_\rho$ mit $V_\rho=V_\pi-\{\nu_\varkappa\}$

Da $\mathfrak{M}_\sigma,\mathfrak{M}_\rho$ eine disjunkte Zerlegung von $\mathfrak{M}_\pi$ bilden, stellen also $\mathfrak{S}_\sigma,\mathfrak{S}_\rho$ eine disjunkte Zerlegung von $\mathfrak{S}_\pi$ dar, und es gilt: $\mathfrak{S}_\pi=\mathfrak{S}_\sigma\cup\mathfrak{S}_\rho$

Nachzutragen bleibt noch, daß $V(\{T_{\sigma_o},T_{\rho_o}\})=\{\nu_\varkappa\}$ ist:

Aus $\pi_0<\ldots<\pi_{2^{k+1}-1}$ folgt nach der Art der Konstruktion $\sigma_0<\ldots<\sigma_{2^k-1}$ und entsprechend für die ρ_i. Damit ist die generelle Voraussetzung erfüllt, die die Anwendung von Lemma 8 gestattet.

Nach (*) existiert zu jedem T_{σ_i} genau ein T_{ρ_j}, sodaß sich T_{σ_i} und T_{ρ_j} genau in der $\nu_\varkappa$-ten Komponente unterscheiden (da alle $Z^*_{\pi_i}$ untereinander gleich sind).

Damit gilt aber $V(\{T_{\sigma_i},T_{\rho_j}\})=\{\nu_\varkappa\}$, woraus nach Lemma 8 insbesondere folgt: $V(\{T_{\sigma_o},T_{\rho_o}\})=\{\nu_\varkappa\}$.

Damit ist dieser Teil der Behauptung vollständig bewiesen. Es muß nun noch die Eindeutigkeit der Zerlegung nachgewiesen werden.

2) Sei durch $\mathfrak{Q}_{\sigma *}$ und $\mathfrak{Q}_{\rho *}$ eine weitere Zerlegung von $\mathfrak{Q}_{\pi}$ gegeben, sodaß gilt: $\mathfrak{Q}_{\sigma *} \neq \mathfrak{Q}_{\sigma}$, $\mathfrak{Q}_{\rho *} \neq \mathfrak{Q}_{\rho}$

$$V_{\sigma *} = V_{\rho *} = V_{\pi} - \{\nu_{\varkappa}\}$$

$$V(\{T_{\sigma * o}, T_{\rho * o}\}) = \{\nu_{\varkappa}\}$$

Nach Lemma 4 gilt dann $\mathfrak{Q}_{\sigma} \cap \mathfrak{Q}_{\rho} = \emptyset$ und $\mathfrak{Q}_{\sigma *} \cap \mathfrak{Q}_{\rho *} = \emptyset$ sowie

$\mathfrak{Q}_{\sigma *} \cap \mathfrak{Q}_{\sigma} = \emptyset$ und $\mathfrak{Q}_{\rho *} \cap \mathfrak{Q}_{\rho} = \emptyset$.

Daraus erhält man sofort: $\mathfrak{Q}_{\sigma *} = \mathfrak{Q}_{\rho}$ und $\mathfrak{Q}_{\rho *} = \mathfrak{Q}_{\sigma}$.

Es gibt also tatsächlich nur genau diese eine Zerlegung von $\mathfrak{Q}_{\pi}$ bezüglich $\nu_{\varkappa}$.

Mit dem Vergleichsverfahren nach Satz 6 lassen sich also zu bekannten Familien gegebenenfalls Oberfamilien bestimmen.
Andererseits läßt sich nach Satz 7 jede Familie derart in zwei Teilfamilien zerlegen, daß diese gerade den Vergleichskriterien von Satz 6 genügen.
Damit ist bereits einzusehen, daß es möglich sein wird, zu gegebenem $\mathfrak{Z}_o$ alle möglichen Familien, also ganz $\mathfrak{T}_o$, sukzessiv durch Anwendung von Satz 6 zu gewinnen. Den exakten Nachweis liefert der folgende Satz:

Satz 8: Zu gegebenem $\mathfrak{Z}_o$ läßt sich die Menge $\mathfrak{T}_o$ aller über $\mathfrak{Z}_o$ möglichen Familien durch sukzessive Anwendung von Satz 6 bilden; den Ausgangspunkt bilden dabei die einelementigen Familien $\{T\}$ mit $T \in \mathfrak{Z}_o$.

Beweis: (vollst. Ind. über k mit $2^k = |\mathfrak{Q}|$)
Für $\varkappa = 1$ ist $V(\mathfrak{Q}) = \emptyset$; weiter läßt sich für diesen Fall, statt Satz 6 auf die $\{T\}$ anzuwenden, Satz 5 auf die T anwenden. Nach Satz 5 erhält man dann sämtliche zweielementigen Familien.
Die Behauptung gelte für alle $\varkappa$ mit $1 \leqslant \varkappa < k$. Für k+1 folgt daraus:
Jedes $\mathfrak{Q}$ mit $|\mathfrak{Q}| = 2^{k+1}$ läßt sich nach Satz 7 bezüglich jedes $\nu \in V(\mathfrak{Q})$ in zwei Teilfamilien $\mathfrak{Q}'$ und $\mathfrak{Q}''$ zerlegen, sodaß $|\mathfrak{Q}'| = |\mathfrak{Q}''| = 2^k$ ist und $\mathfrak{Q}'$ und $\mathfrak{Q}''$ den Bedingungen von Satz 6 genügen. Nach Induktions-Annahme sind $\mathfrak{Q}'$ und $\mathfrak{Q}''$ aber bereits bekan
sodaß hieraus nach Satz 6 auch $\mathfrak{Q}$ gebildet werden kann.

Zur Vorbereitung des abschließenden Satz 9 folgen nun noch drei Lemmata.

Lemma 9: $\mathfrak{S}_\pi=\{T_{\pi_0},\ldots,T_{\pi_{2^k-1}}\}$ sei Familie mit $V(\mathfrak{S}_\pi)=\{\nu_{k-1},\ldots,\nu_0\}$. Dann gibt es zu jedem $T_{\pi_i}\in\mathfrak{S}_\pi$ für jedes $\nu\in V(\mathfrak{S}_\pi)$ genau ein $T_{\pi_j}\in\mathfrak{S}_\pi$ mit $V(\{T_{\pi_i},T_{\pi_j}\})=\{\nu\}$, d.h. $|i-j|=2^\nu$.

Beweis: Es seien T_{π_i} und ν beliebig aber fest gewählt.

Nach Satz 7 läßt sich $\mathfrak{S}_\pi$ eindeutig bezüglich ν in $\mathfrak{S}_\sigma$ und $\mathfrak{S}_\rho$ zerlegen, sodaß also gilt:

1) $\mathfrak{S}_\sigma,\mathfrak{S}_\rho$ sind Familien mit $|\mathfrak{S}_\sigma|=|\mathfrak{S}_\rho|=2^{k-1}$

2) $V(\mathfrak{S}_\sigma)=V(\mathfrak{S}_\rho)=V(\mathfrak{S}_\pi)-\{\nu\}$

3) $V(\{T_{\sigma_o},T_{\rho_o}\})=\{\nu\}$

Dabei ist $\mathfrak{S}_\sigma\cap\mathfrak{S}_\rho=\emptyset$; mit 2) folgt dann aus Lemma 8, daß $V(\{T_{\sigma_i},T_{\rho_i}\})=\{\nu\}$ für alle $i=0,\ldots,2^{k-1}-1$.

Ist also o.B.d.A. T_{π_i} aus $\mathfrak{S}_\sigma$, also $T_{\pi_i}=T_{\sigma_\lambda}\in\mathfrak{S}_\sigma$, so gibt es dazu auch $T_{\rho_\lambda}\in\mathfrak{S}_\rho$, sodaß $V(\{T_{\pi_i},T_{\rho_\lambda}\})=\{\nu\}$. Wegen $\mathfrak{S}_\rho\subset\mathfrak{S}_\pi$ ist dann aber auch $T_{\rho_\lambda}\in\mathfrak{S}_\pi$, etwa $T_{\rho_\lambda}=T_{\pi_j}$; aus (13) folgt die Eindeutigkeit von T_{π_j}, womit dann alles gezeigt ist.

Lemma 10: Es seien $\mathfrak{S}_\sigma$ und $\mathfrak{S}_\rho$ Familien mit $|\mathfrak{S}_\sigma|=|\mathfrak{S}_\rho|$, $\mathfrak{S}_\sigma\cap\mathfrak{S}_\rho=\emptyset$, aber $V(\mathfrak{S}_\sigma)\neq V(\mathfrak{S}_\rho)$.

Dann ist $\mathfrak{S}=\mathfrak{S}_\sigma\cup\mathfrak{S}_\rho$ keine Familie.

Beweis: Zunächst seien die Verwandtschaften abkürzend mit V_σ und V_ρ bezeichnet.

Mit $|\mathfrak{S}_\sigma|=|\mathfrak{S}_\rho|=2^k$ erhält man nach (11) $|V_\sigma|=|V_\rho|=k$.

Daraus folgt wegen der Ungleichheit der Verwandtschaften: $|V_\sigma\cap V_\rho|\leq k-1$.

Für das weitere werden nun einige besonders interessierende Mengen eingeführt:

$$L_\cup = V_\sigma\cup V_\rho$$
$$L_\cap = V_\sigma\cap V_\rho$$
$$L_\sigma = V_\sigma - L_\cap$$
$$L_\rho = V_\rho - L_\cap$$

Mit $|L_\cap| \leq k-1$ ist dann $|L_\sigma| = |L_\rho| \geq 1$, und es gilt:

$|L_\cap \cup L_\sigma \cup L_\rho| = |L_\cup| \geq k+1$.

1) Es lassen sich $T^*_\sigma \in \mathfrak{L}_\sigma$ und $T^*_\rho \in \mathfrak{L}_\rho$ so finden, daß für alle $i \in L_\cup$ die Beziehung $t^*_{\sigma,i} = t^*_{\rho,i}$ besteht:

   Sei zunächst $T_\sigma \in \mathfrak{L}_\sigma$ beliebig.
   Da die Terme aus $\mathfrak{L}_\rho$ für alle $i \in V_\rho$ frei sind in ihren Komponenten (alle Kombinationen sind zugelassen), gibt es sicher $T^*_\rho \in \mathfrak{L}_\rho$ mit $t^*_{\rho,i} = t_{\sigma,i}$ für alle $i \in V_\rho = L_\cap \cup L_\rho$.
   Entsprechendes gilt für die Terme aus $\mathfrak{L}_\sigma$, sodaß man insbesondere zu dem beliebig vorgegebenen T_σ ein T^*_σ finden kann mit a) $t^*_{\sigma,i} = t_{\sigma,i}$ für alle $i \notin L_\sigma$, d.h. f.a. $i \in V_\rho$

   b) $t^*_{\sigma,j}$ frei wählbar für $j \in L_\sigma$, also speziell $t^*_{\sigma,j} = t^*_{\rho,j}$ für alle $j \in L_\sigma$.

   Damit haben T^*_σ und T^*_ρ die oben geforderte Eigenschaft.

2) In ganz analoger Weise kann man auch T^*_σ und T^*_ρ so finden, daß gilt: $t^*_{\sigma,i} \neq t^*_{\rho,i}$ für alle $i \in L_\cup$.

Aus (11) folgt, daß alle Terme von $\mathfrak{L}_\sigma$ genau in den Komponenten $t_{\sigma,i}$ mit $i \notin V_\sigma$, also mindestens in den Komponenten mit $i \notin L_\cup \supset V_\sigma$, jeweils übereinstimmen.

Entsprechendes gilt für $\mathfrak{L}_\rho$.
Damit erhält man:
Stimmen irgend zwei Terme $T_\sigma \in \mathfrak{L}_\sigma$ und $T_\rho \in \mathfrak{L}_\rho$ in allen i-ten Komponenten mit $i \notin L_\cup$ überein, so gilt dies auch sofort für je zwei Terme T_σ und T_ρ .
Stimmen andererseits zwei Terme T_σ und T_ρ in einer i-ten Komponente mit $i \notin L_\cup$ nicht überein, so gilt auch das gleichzeitig für je zwei Terme T_σ und T_ρ .

Man kann so für $\mathfrak{L}_\sigma$ und $\mathfrak{L}_\rho$ zwei Situationen unterscheiden:

A) Je zwei Terme $T_\sigma \in \mathfrak{L}_\sigma$ und $T_\rho \in \mathfrak{L}_\rho$ stimmen in allen i-ten Komponenten mit $i \notin L_\cup$ überein.
   Nach 1) findet man dann T^*_σ und T^*_ρ , sodaß $t^*_{\sigma,i} = t^*_{\rho,i}$ auch noch für alle $i \in L_\cup$ gilt.
   Das heißt aber $T^*_\sigma = T^*_\rho$, also $\mathfrak{L}_\sigma \cap \mathfrak{L}_\rho \neq \emptyset$, Widerspruch!

B) Je zwei Terme $T_\sigma \in \mathfrak{L}_\sigma$ und $T_\rho \in \mathfrak{L}_\rho$ stimmen in mindestens einer i-ten Komponente mit $i \notin L_\cup$ nicht überein.
Nach 2) findet man dann insbesondere T^*_σ und T^*_ρ, sodaß $t^*_{\sigma,i} \neq t^*_{\rho,i}$ auch noch zusätzlich für alle $i \in L_\cup$ gilt. Wegen $|L_\cup| \geq k+1$ stimmen diese beiden Terme dann in mindestens k+2 Komponenten nicht überein; d.h. in $\mathfrak{S}$ gibt es zwei Terme, die sich in mindestens k+2 Komponenten unterscheiden.
Aus $|\mathfrak{L}_\sigma| = |\mathfrak{L}_\rho| = 2^k$ folgt $|\mathfrak{S}| \leq 2^{k+1}$; wäre also $\mathfrak{S}$ Familie, so wäre $|V(\mathfrak{S})| \leq k+1$, sodaß sich die Terme von $\mathfrak{S}$ in höchstens k+1 Komponenten unterscheiden würden, Widerspruch!

Aus A) und B) folgt: $\mathfrak{S}$ ist keine Familie.

Lemma 11: Es seien zwei Familien $\mathfrak{L}_\sigma = \{T_{\sigma_o}, \ldots\}$ und $\mathfrak{L}_\rho = \{T_{\rho_o}, \ldots\}$ mit $\mathfrak{L}_\sigma \cap \mathfrak{L}_\rho = \emptyset$ gegeben, und es gelte: T_{σ_o} und T_{ρ_o} sind nicht verwandt.
Dann ist $\mathfrak{S} = \mathfrak{L}_\sigma \cup \mathfrak{L}_\rho$ keine Familie.

Beweis: O.B.d.A. kann $V(\mathfrak{L}_\sigma) = V(\mathfrak{L}_\rho) = \{\nu_{k-1}, \ldots, \nu_0\} = \bar{V}$ (also auch $|\mathfrak{L}_\sigma| = |\mathfrak{L}_\rho| = 2^k$) angenommen werden, da sonst $\mathfrak{S}$ schon nach Lemma 10 keine Familie wäre.

Aus (19) erhält man: $t_{\sigma_o,i} = t_{\rho_o,i} = 0$ für alle $i \in V$ (a)

Aus (11) folgt, da T_{σ_o} und T_{ρ_o} nicht verwandt sind, daß es mindestens zwei Indizes μ_1 und μ_2 gibt, sodaß $t_{\sigma_o,\mu_\varkappa} \neq t_{\rho_o,\mu_\varkappa}$, $\varkappa = 1,2$. Wegen (a) ist dabei $\mu_1, \mu_2 \notin V$. (b)

Weiter erhält man aus (11): $t_{\sigma_{2^{k-1}},j} = t_{\sigma_0,j}$ f.a. $j \notin V$. (c)

Aus (19) folgt andererseits: $t_{\sigma_{2^{k-1}},j} = 1$ f.a. $j \in V$,

also nach (a): $t_{\sigma_{2^{k-1}},j} \neq t_{\sigma_0,j}$ f.a. $j \in V$.

Mit (b) und (c) heißt das:

$$t_{\sigma_{2^{k-1}},j} \neq t_{\rho_0,j} \quad \text{für alle } j \in V \text{ und für } j = \mu_1, \mu_2$$

T_{ρ_o} und $T_{\sigma_{2^{k-1}}}$ unterscheiden sich also in k+2 Komponenten.

Wie in Lemma 10 folgt daraus, daß $\mathfrak{S}$ keine Familie ist.

Satz 9: $\mathfrak{A}_\sigma, \mathfrak{A}_\rho$ seien Familien; dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

A) $\mathfrak{S}=\mathfrak{A}_\sigma \cup \mathfrak{A}_\rho$ ist Familie ; $\mathfrak{A}_\sigma \cap \mathfrak{A}_\rho = \emptyset$

B) $V(\mathfrak{A}_\sigma)=V(\mathfrak{A}_\rho)$; $V(\{T_{\sigma_o}, T_{\rho_o}\})=\{\nu\}$

Beweis: B) $\Longrightarrow$ A) : Diese Richtung folgt sofort aus Satz 6; wegen $V(\{T_{\sigma_o}, T_{\rho_o}\})=\{\nu\}$ ist dabei nach Lemma 5 auch $\mathfrak{A}_\sigma \neq \mathfrak{A}_\rho$, woraus nach Lemma 4 $\mathfrak{A}_\sigma \cap \mathfrak{A}_\rho = \emptyset$ folgt.

A) $\Longrightarrow$ B) : Die Anzahl der Elemente einer jeden Familie ist offenbar eine Potenz von 2; also ist z.B. $|\mathfrak{S}|=2^k$. Aus den Voraussetzungen folgt dann $|\mathfrak{A}_\sigma|=|\mathfrak{A}_\rho|=2^{k-1}$, sodaß nach Lemma 10 gilt: $V(\mathfrak{A}_\sigma)=V(\mathfrak{A}_\rho)$.

Entsprechend folgt dann aus Lemma 11: Es existiert $\nu \in \{n-1,\ldots,0\}$ mit $V(\{T_{\sigma_o}, T_{\rho_o}\})=\{\nu\}$.

Analog zu (13) kann man für die in Satz 9 vorliegende Situation das folgende Lemma beweisen:

Lemma 12: Zu jeder Familie $\mathfrak{A}_\sigma$ gibt es in $\mathfrak{T}_o$ höchstens eine Familie $\mathfrak{A}_\rho$ mit $V(\mathfrak{A}_\sigma)=V(\mathfrak{A}_\rho)$ und $V(\{T_{\sigma_o}, T_{\rho_o}\})=\{\nu\}$.

Beweis: Annahme: Neben $\mathfrak{A}_\rho$ gibt es noch $\mathfrak{A}^*_\rho$ mit den geforderten Eigenschaften.

Nach (13) folgt daraus $T^*_{\rho_o}=T_{\rho_o}$; zudem ergibt $V(\mathfrak{A}_\sigma)=V(\mathfrak{A}^*_\rho)$ und $V(\mathfrak{A}_\sigma)=V(\mathfrak{A}_\rho)$ auch $V(\mathfrak{A}_\rho)=V(\mathfrak{A}^*_\rho)$. Daher ist nach Lemma 4 $\mathfrak{A}_\rho=\mathfrak{A}^*_\rho$.

Die Aussage von Satz 9 kann nun für die praktische Anwendung noch präzisiert werden; damit wird dann auch die Bedeutung von Satz 5 noch etwas klarer.

Lemma 13: Es seien $\mathfrak{A}_\sigma, \mathfrak{A}_\rho$ zwei Familien, die einander nicht enthalten, die also auch insbesondere nicht einander gleich sind. Dann folgt aus $\mathfrak{A}_\sigma \cap \mathfrak{A}_\rho \neq \emptyset$, daß $\mathfrak{S}=\mathfrak{A}_\sigma \cup \mathfrak{A}_\rho$ keine Familie ist.

Beweis: Zunächst ist klar, daß die Anzahl der Elemente einer Familie eine Potenz von 2 ist. Sei also $|\mathfrak{A}_\sigma|=2^s$ und $|\mathfrak{A}_\rho|=2^r$. Für den nichtleeren Durchschnitt gilt dann: $|\mathfrak{A}_\sigma \cap \mathfrak{A}_\rho|=w\neq 0$, wobei nach der Voraussetzung gilt: $w<2^s$ und $w<2^r$; ist also o.B.d.A. $r\leq s$, so ist insbesondere $0<2^r-w<2^s$. Das heißt aber:

$$2^s < |\mathfrak{A}_\sigma \cup \mathfrak{A}_\rho| = 2^s+2^r-w < 2^{s+1} .$$

Die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{S}$ ist also keine Potenz von 2, und somit ist $\mathfrak{S}$ sicher keine Familie.

Mit dem Ergebnis von Lemma 13 kann man die Aussage von Satz 9 neu formulieren, wobei zwei offenbar äquivalente Fassungen von Interesse sind, die gemäß Satz 5 auseinander hervorgehen:

Satz 10_1: $\mathfrak{A}_\sigma$ und $\mathfrak{A}_\rho$ seien Familien, die einander nicht enthalten. $\mathfrak{S}=\mathfrak{A}_\sigma \cup \mathfrak{A}_\rho$ ist genau dann Familie, wenn $V(\mathfrak{A}_\sigma)=V(\mathfrak{A}_\rho)$ und $V(\{T_{\sigma_o}, T_{\rho_o}\})=\{\nu\}$ gelten.

Satz 10_2: $\mathfrak{A}_\sigma$ und $\mathfrak{A}_\rho$ seien Familien, die einander nicht enthalten, und für die o.B.d.A. $\sigma_o<\rho_o$ gelten soll.
$\mathfrak{S}=\mathfrak{A}_\sigma \cup \mathfrak{A}_\rho$ ist genau dann Familie, wenn gilt:

a) $V(\mathfrak{A}_\sigma)=V(\mathfrak{A}_\rho)$

b) es gibt ν mit $t_{\sigma_o,\nu}=0$ und $\rho_o=2^\nu+\sigma_o$

Aus diesen letzten Ergebnissen kann man nun, gewissermaßen als Ausblick auf Teil III, einige wichtige Schlüsse ziehen:
Wenn zwei zur Oberfamilien-Bildung betrachtete Familien nicht ineinander enthalten sind, dann sind die Bildungs-Bedingungen notwendig und hinreichend. Das heißt mit anderen Worten: Wird statt der Konstruktion von $\mathfrak{T}_o$ sofort die von $\mathfrak{B}$ ins Auge gefaßt, wobei das rekursive Verfahren gemäß Satz 8 verwendet wird, und werden auf jeder Rekursionsstufe sofort die nicht-ordnungsmaximalen Familien entfernt, dann ist diese rekursive Bildung von Oberfamilien zur Bestimmung von $\mathfrak{B}$ in eineindeutiger Weise durch Satz 10 bestimmt.

In Teil III wird gezeigt werden, daß man in der Tat auf jeder Stufe auf die nicht-ordnungsmaximalen Familien verzichten kann, und daß man dann auch $\mathfrak{B}$ erhält. Das heißt aber: Mit Satz 10/ Satz 8 ist das optimale rekursive Verfahren zur Bestimmung von $\mathfrak{B}$ gegeben.

Der Beweis dafür, daß dieses Verfahren überhaupt optimal ist, also nicht nur in der Klasse der rekursiven Verfahren, wird in Teil III erfolgen.

Aus diesen Betrachtungen geht hervor, daß $\mathfrak{B}$ doch eine ausgezeichnete Rolle spielt, während es für die Formulierung des Überdeckungsproblems in Teil I eigentlich von untergeordneter Bedeutung war. Die Erklärung dieses scheinbaren Widerspruchs liegt darin, daß gerade durch die Kenntnis spezieller Strukturen eines Problems im allgemeinen natürlich auch die Angabe effektiverer Lösungsmethoden möglich ist. Hier sind also starke Zusammenhänge zwischen den überdeckenden Objekten, den Familien, bekannt als Familienstrukturen. Und seinen Niederschlag findet diese Kenntnis dann in einer speziellen Modifizierung des allgemeineren Überdeckungsverfahrens.

Ein weiterer wichtiger Punkt ist die praktische Handhabung des Verfahrens: Mit dem Beispiel zur Anwendung von Satz 5 wurde die Vergleichsmatrix NY eingeführt. Satz 10 zeigt nun die allgemeinere Bedeutung dieser Matrix:

Sei NY mit dem ersten Rekursionsschritt bekannt; seien weiter wie oben auf jeder Rekursionsstufe nur Familien gegeben, die einander nicht enthalten. Dann kann Satz 10 wie folgt formuliert werden:

(20) Die beiden 2^k-elementigen Familien $\mathfrak{A}_\sigma, \mathfrak{A}_\rho$ bilden genau dann die 2^{k+1}-elementige Familie $\mathfrak{A}_\sigma \cup \mathfrak{A}_\rho$, wenn - für $\sigma_o < \rho_o$ - gilt:

a) $V(\mathfrak{A}_\sigma) = V(\mathfrak{A}_\rho)$

b) $NY(\sigma_o, \nu) = 1$ für ν mit $\rho_o = \sigma_o + 2^\nu$

Daraus wiederum erhält man unter sonst gleichen Voraussetzungen:

(21) $\mathfrak{A}_\sigma$ läßt sich genau dann zu einer 2^{k+1}-elementigen Familie erweitern, wenn gilt: Es gibt ein ν, sodaß

a) $NY(\sigma_o, \nu) = 1$ und

b) Für die durch $\mathfrak{A}_\rho = \{T_{\sigma_o + 2^\nu}, \ldots\}$ bestimmte Familie gilt, wenn sie existiert, $V(\mathfrak{A}_\sigma) = V(\mathfrak{A}_\rho)$

Es ist dann $\mathfrak{A}_\sigma \cup \mathfrak{A}_\rho$ die gesuchte 2^{k+1}-elementige Familie.

In dieser letzten Fassung scheint die Aussage von Satz 10 zwar ihren kompliziertesten Ausdruck gefunden zu haben; es wird sich aber in Teil III zeigen, daß (21) in einfachster Weise einen praktischen Algorithmus beschreibt.

III) Algorithmus zur $\mathfrak{B}$-Bestimmung

In Teil II hat sich herausgestellt, daß die Kenntnis darüber wesentlich ist, wann zwei Familien ineinander enthalten sind, und welche Rolle das in dem dort beschriebenen Verfahren spielt. Diese Zusammenhänge sollen zunächst untersucht werden.

Lemma 1: Sei die Familie $\mathfrak{L}_\sigma=\{T_{\sigma_0},\ldots,T_{\sigma_{2^k-1}}\}$ mit $V(\mathfrak{L}_\sigma)=\{\nu_{k-1},\ldots,\nu_0\}$ gegeben. Dann liegen die σ_i in ν-ten Halbperioden gleichen Typs genau dann, wenn $\nu\notin V(\mathfrak{L}_\sigma)$ gilt.

Beweis: A) $\nu\in V(\mathfrak{L}_\sigma)$:

Nach II, Lemma 9 gibt es zu jedem $T_{\sigma_i}\in\mathfrak{L}_\sigma$ für jedes $\nu\in V(\mathfrak{L}_\sigma)$ ein $T_{\sigma_j}\in\mathfrak{L}_\sigma$ mit $V(\{T_{\sigma_i},T_{\sigma_j}\})=\{\nu\}$.

Daraus folgt nach II, Satz 5-(9)-(6) , daß σ_i und σ_j in ν-ten Halbperioden verschiedenen Typs liegen.

B) $\nu\notin V(\mathfrak{L}_\sigma)$:

(vollst. Ind. über k)

Für k=0 ist $\mathfrak{L}_\sigma=\{T_{\sigma_0}\}$, sodaß die Behauptung offenbar gilt.

Die Behauptung gelte für k; man erhält dann für k+1:

Nach II, Satz 7 gibt es bezüglich ν_k eine eindeutige Zerlegung von $\mathfrak{L}_\sigma$ in zwei Teilfamilien $\mathfrak{L}'_\sigma$ und $\mathfrak{L}''_\sigma$ mit $V(\mathfrak{L}'_\sigma)=V(\mathfrak{L}''_\sigma)=\{\nu_{k-1},\ldots,\nu_0\}=V$ und $V(\{T_{\sigma'_0},T_{\sigma''_0}\})=\{\nu_k\}$.

Dabei ist sicher $\mathfrak{L}'_\sigma\cap\mathfrak{L}''_\sigma=\emptyset$; wegen $|\mathfrak{L}'_\sigma|=|\mathfrak{L}''_\sigma|=2^k$ gilt dann nach Induktions-Annahme die Behauptung jeweils für $\mathfrak{L}'_\sigma$ und $\mathfrak{L}''_\sigma$ für $\nu\notin V$, also erst recht für $\nu\notin V(\mathfrak{L}_\sigma)$. Das heißt: alle σ'_i für sich und alle σ''_i für sich sind bereits in Halbperioden gleichen Typs. Die beiden Teilergebnisse sind also nur noch zu koppeln, sodaß jetzt zu zeigen ist:

liegt σ'_0 in einer ν-ten $\frac{1-}{0-}$ Halbperiode, so auch σ''_0 . (*)

O.B.d.A. kann $\sigma'_0<\sigma''_0$ angenommen werden, also $\sigma''_0=\sigma'_0+2^{\nu_k}$.

Für beliebiges $\nu\notin V(\mathfrak{L}_\sigma)$ sind nun zwei Fälle möglich:

a) $\nu > \nu_k$: Nach II, Satz 5 gibt es eine gemeinsame (ν_k+1)-te Halbperiode H_{ν_k+1}, die σ_o' und σ_o'' erfaßt. Wegen $\nu \geq \nu_k+1$ gibt es dann eine ν-te Halbperiode H_ν sodaß mit $H_\nu \supset H_{\nu_k+1}$ auch $\sigma_o', \sigma_o'' \in H_\nu$ gilt. Damit ist (*) offenbar nachgewiesen.

b) $\nu < \nu_k$: Für die Längen L der Halbperioden gilt nach II,(2): $2^{\nu_k} = L_{\nu_k} = 2^r \cdot L_{\nu_k - r}$, wobei $r>0$ hier durch $r = \nu_k - \nu$ gegeben ist. Es ist also $\sigma_o'' = \sigma_o' + 2^r \cdot L_{\nu_k - r}$, wobei wegen $r \geq 1$ jedenfalls $2^r \equiv 0 \pmod 2$ gilt.
D.h.: liegt σ_o' in $H_{\nu_k - r, s}$, dann liegt σ_o'' in $H_{\nu_k - r, s+2^r}$.
Mit $\nu = \nu_k - r$ folgt daraus nach II, (6) sofort (*) .

Lemma 2: Sei $\mathfrak{S}_\sigma = \{T_{\sigma_0}, \ldots, T_{\sigma_{2^k-1}}\}$ Familie mit $V(\mathfrak{S}_\sigma) = \{\nu_{k-1}, \ldots, \nu_0\}$.
In der Menge $\mathfrak{T}$ aller Familien gibt es eine von $\mathfrak{S}_\sigma$ verschiedene Familie $\mathfrak{S}_\rho = \{T_{\rho_0}, \ldots, T_{\rho_{2^k-1}}\}$ mit $V(\mathfrak{S}_\sigma) = V(\mathfrak{S}_\rho) = V$ und $V(\{T_{\rho_i}, T_{\sigma_i}\}) = \{\nu\}$ genau dann, wenn $\nu \notin V$ ist.

Beweis: In der Menge $\mathfrak{F}$ aller n-stelligen Terme gibt es sicher für jedes i ein T_{ρ_i}, sodaß $V(\{T_{\sigma_i}, T_{\rho_i}\}) = \{\nu\}$ ist.
(Diese T_{ρ_i} lassen sich nach II, Satz 5 finden.)

A) $\nu \notin V$:
Nach Lemma 1 sind dann alle σ_i aus ν-ten Halbperioden gleichen Typs, also o.B.d.A. aus ν-ten 0-Halbperioden, und es gilt $\rho_i = 2^\nu + \sigma_i$, für $i = 0, \ldots, 2^k-1$. Daraus folgt nach II, (14):

$$\rho_i = \sum_{\lambda=0}^{k-1} t_{\sigma_i, \nu_\lambda} \cdot 2^{\nu_\lambda} + \underbrace{K_\sigma + 2^\nu}_{K_\rho}$$

Damit trägt nach II, (19) die Menge $\mathfrak{S}_\rho = \{T_{\rho_0}, \ldots, T_{\rho_{2^k-1}}\}$ die Struktur einer Familie, und man entnimmt aus (19) auch sofort $V(\mathfrak{S}_\sigma) = V(\mathfrak{S}_\rho)$.

B) Sei nun $\mathfrak{R}_\rho$ Familie mit den geforderten Eigenschaften.

Annahme: $\nu \in V$

Nach II, Lemma 9 gibt es dann zu jedem $T_{\sigma_i} \in \mathfrak{R}_\sigma$ ein $T^*_{\sigma_i} \in \mathfrak{R}_\sigma$ mit $V(\{T_{\sigma_i}, T^*_{\sigma_i}\}) = \{\nu\}$. Dieses $T^*_{\sigma_i}$ ist nach II, (13) eindeutig bestimmt, sodaß man unmittelbar $T_{\sigma_i} = T_{\rho_i}$ für alle i erhält. Das heißt aber $\mathfrak{R}_\sigma = \mathfrak{R}_\rho$, Widerspruch!

Def. 1: Ist $\mathfrak{R}_\sigma$ Familie mit $V(\mathfrak{R}_\sigma) = \{\nu_{k-1}, \ldots, \nu_0\}$, so soll die folgende Bezeichnungsweise vereinbart werden: $m(\mathfrak{R}_\sigma) = \nu_{k-1}$. Wegen $\nu_{k-1} > \ldots > \nu_0$ bezeichnet also $m(\mathfrak{R}_\sigma)$ den höchsten Verwandtschafts-Index der jeweiligen Familie $\mathfrak{R}_\sigma$.

Satz 1: Es seien die Familien $\mathfrak{R}_\sigma = \{T_{\sigma_0}, \ldots, T_{\sigma_{2^k-1}}\}$ mit $V(\mathfrak{R}_\sigma) = \{\nu_{k-1}, \ldots, \nu_0\}$ und $\mathfrak{R}_\rho = \{T_{\rho_0}, \ldots, T_{\rho_{2^l-1}}\}$ mit $V(\mathfrak{R}_\rho) = \{\mu_{l-1}, \ldots, \mu_0\}$ gegeben; zudem sei $m(\mathfrak{R}_\rho) > m(\mathfrak{R}_\sigma)$. Dann gilt: $\mathfrak{R}_\rho \not\subseteq \mathfrak{R}_\sigma$.

Beweis: Aus II, (16) und (17), erhält man:

a)

1) $$\sigma_o = \sum_{\lambda=0}^{k-1} t_{\sigma_o, \nu_\lambda} \cdot 2^{\nu_\lambda} + K$$

$$\Longrightarrow \sigma_o = K \quad , \text{ da } \quad t_{\sigma_o, \nu_o} = \ldots = t_{\sigma_o, \nu_{k-1}} = 0$$

Entsprechend erhält man

2) $$\sigma_{2^k-1} = \sum_{\lambda=0}^{k-1} 2^{\nu_\lambda} + K \text{ , da } t_{\sigma_{2^k-1}, \nu_\lambda} = 1 \text{ für alle } \lambda \text{ gilt.}$$

Aus 1) und 2) folgt: $$\sigma_{2^k-1} - \sigma_0 = \sum_{\lambda=0}^{k-1} 2^{\nu_\lambda} \leqslant \sum_{\lambda=0}^{\nu_{k-1}} 2^\lambda$$

$$\Longrightarrow \sigma_{2^k-1} - \sigma_0 \leqslant 2^{\nu_{k-1}+1} - 1$$

b) Analog zu a) erhält man:

$$\rho_{2^l-1} - \rho_0 = \sum_{\lambda=0}^{l-1} 2^{\mu_\lambda} \geqslant 2^{\mu_{l-1}} \quad ; \text{ wegen } \mu_{l-1} > \nu_{k-1}$$

folgt daraus : $$\rho_{2^l-1} - \rho_0 > 2^{\nu_{k-1}+1} - 1$$

Aus a) und b) folgt also:

$$\rho_{2^{l}-1}-\rho_0 > \sigma_{2^{k}-1}-\sigma_0 \qquad (*)$$

Zwischen ρ_o und σ_o sind nun die beiden folgenden Beziehungen möglich:

α) $\sigma_o \leqslant \rho_o$: Dann folgt aus (*) $\rho_{2^{l}-1}-\sigma_0 \geqslant \rho_{2^{l}-1}-\rho_0 > \sigma_{2^{k}-1}-\sigma_0$

$$\Longrightarrow \rho_{2^{l}-1} > \sigma_{2^{k}-1}$$

Wegen $\sigma_0 < \ldots < \sigma_{2^{k}-1}$ heißt das: $T_{\rho_{2^{l}-1}} \notin \mathfrak{L}_\sigma$

β) $\sigma_o > \rho_o$: Dann ist ohnehin $T_{\rho_o} \notin \mathfrak{L}_\sigma$

Aus α) und β) folgt: $\mathfrak{L}_\rho \nsubseteq \mathfrak{L}_\sigma$

Satz 2: Sei $\mathfrak{L}_\sigma = \{T_{\sigma_0}, \ldots, T_{\sigma_{2^{k}-1}}\}$ Familie mit $V(\mathfrak{L}_\sigma) = \{\nu_{k-1}, \ldots, \nu_o\}$ und $\mathfrak{L}_\sigma \in \mathfrak{T}_o$. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

A) Zu $\mathfrak{L}_\sigma$ existiere $\mathfrak{L}_\rho \in \mathfrak{T}_o$ mit $V(\mathfrak{L}_\sigma) = V(\mathfrak{L}_\rho)$ und $V(\{T_{\sigma_o}, T_{\rho_o}\}) = \{\nu\}$.

B) Zu $\mathfrak{L}_\sigma$ existiere $\mathfrak{L}_\pi \in \mathfrak{T}_o$ mit $m(\mathfrak{L}_\pi) \geqslant m(\mathfrak{L}_\sigma)$, sodaß $\mathfrak{L}_\sigma \subsetneq \mathfrak{L}_\pi$ ist.

Beweis: A) $\Longrightarrow$ B) : Aus II, Satz 6 folgt, daß $\mathfrak{S} = \mathfrak{L}_\sigma \cup \mathfrak{L}_\rho$ Familie ist mit $\mathfrak{L}_\sigma \subsetneq \mathfrak{S}$ und $V(\mathfrak{S}) = V(\mathfrak{L}_\sigma) \cup \{\nu\}$, sodaß gilt: $m(\mathfrak{S}) = \mathrm{Max}\{\nu, m(\mathfrak{L}_\sigma)\}$, also $m(\mathfrak{S}) \geqslant m(\mathfrak{L}_\sigma)$.

Mithin ist $\mathfrak{L}_\pi$ durch $\mathfrak{S}$ gegeben.

B) $\Longrightarrow$ A) : Es wird zunächst die Menge $\mathfrak{T}$ aller Familien betrachtet. Nach Lemma 3 gibt es in $\mathfrak{T}$ für $\nu \notin V(\mathfrak{L}_\sigma)$ eine Familie $\mathfrak{L}_\rho$, $\mathfrak{L}_\rho \neq \mathfrak{L}_\sigma$, mit $V(\mathfrak{L}_\sigma) = V(\mathfrak{L}_\rho) = V$ und $V(\{T_{\sigma_i}, T_{\rho_i}\}) = \{\nu\}$ für $i = 0, \ldots, 2^{k}-1$.

Es wird jetzt gezeigt, daß $\mathfrak{L}_\rho \subset \mathfrak{L}_\pi$; damit ist dann auch $\mathfrak{L}_\rho \in \mathfrak{T}_o$ gesichert, sodaß $\mathfrak{L}_\rho$ alle Forderungen aus A) erfü

Aus $\mathfrak{L}_\sigma \subsetneq \mathfrak{L}_\pi$ folgt unmittelbar $V(\mathfrak{L}_\sigma) \subsetneq V(\mathfrak{L}_\pi)$, d.h. es gibt ein $\tilde{\nu} \in V(\mathfrak{L}_\pi)$ mit $\tilde{\nu} \notin V(\mathfrak{L}_\sigma)$. Also kann man das obige $\mathfrak{L}_\rho$ gerade für dieses $\tilde{\nu}$ auswählen.

Andererseits erhält man aus II, Lemma 9, daß zu jedem $T_{\sigma_i} \in \mathfrak{S}_\sigma$ ein $T' \in \mathfrak{S}_\pi$ existiert mit $V(\{T_{\sigma_i}, T'\}) = \{\tilde{\nu}\}$, und in dieser Verwandtschaft ist T' eindeutig bestimmt. Daher ist $T_{\rho_i} = T'$, also $T_{\rho_i} \in \mathfrak{S}_\pi$.

Dies gilt für alle i, und daher gilt: $\mathfrak{S}_\rho \subset \mathfrak{S}_\pi$.

Aus Satz 1, Satz 2 und II, Satz 6 folgt unmittelbar:

Satz 3: Zu $\mathfrak{S}_\sigma \in \mathfrak{T}_o$ existiere genau dann $\mathfrak{S}_\pi \in \mathfrak{T}_o$ mit $\mathfrak{S}_\sigma \subset \mathfrak{S}_\pi$, wenn mit $\mathfrak{S}_\sigma$ eine Oberfamilienbildung gemäß II, Satz 6 möglich ist.

(1) Man hat also im Algorithmus zur Bestimmung der Basis $\mathfrak{B}$ nur dafür zu sorgen, daß eine einmal zur Oberfamilien-Bildung benutzte Familie nicht mehr als separate Familie in $\mathfrak{B}$ aufgenommen wird.
Damit kann natürlich nicht ausgeschlossen werden, daß auf verschiedenen Wegen durch Oberfamilien-Bildung zwei Exemplare einer Familie enstehen. Es muß daher jede Familie vor der Zuweisung an $\mathfrak{B}$ darauf untersucht werden, ob ein gleiches Exemplar in $\mathfrak{B}$ bereits vorliegt. Dies läßt sich in der Praxis recht einfach durchführen.

Wie im Anschluß an Satz 10 in II bereits erläutert wurde, ist dieses durch II, Satz 6, Satz 8 und III, Satz 3 beschriebene Verfahren zur $\mathfrak{B}$ - Bestimmung (in anderer Sprechweise also zur Bestimmung der Menge der Primimplikanten) optimal. Dies soll nun noch kurz bewiesen werden:

Satz 4: Das wie oben gegebene Verfahren zur $\mathfrak{B}$-Bestimmung ist optimal.

Beweis: Zunächst soll die Optimalität in der Klasse der rekursiven Verfahren nachgewiesen werden:

In jedem Rekursionsschritt gemäß II, Satz 8 können gemäß Satz 3 und (1) die nicht-ordnungsmaximalen Familien, die also nicht als Basis-Familien erkannt sind, entfernt werden. Dann aber ist das rekursive Bildungsgesetz von II, Satz 6 notwendig und hinreichend. Da andererseits nach II,Satz 7 jede Familie tasächlich in eindeutiger Weise - der Konzeption von II, Satz 6 entsprechend - aufgebaut ist, ist damit die Optimalität nachgewiesen.

Allgemein erhält man daraus für beliebige Verfahren:

Ein elementweises Bestimmen der Familien erfordert bei 2^k-elementigen Familien offenbar 2^k Auswahlschritte; dagegen benötigt das angegebene Verfahren nur k Schritte, wobei die "Zwischenergebnisse" noch weiterbenutzt werden können.

Aus der eindeutig nach II, (19) gegebenen Struktur der Familien sieht man, daß eindeutig beschreibbare "Zwischenergebnisse", also Teilmengen von Familien, stets nur wieder selber Familien sein können oder (rekursiv zu bildende) Vereinigungen davon. Daraus folgt, daß auch für irgendwie geartete nicht-rekursive Verfahren die untere Schranke der Zahl der Schritte zur Bestimmung einer 2^k-elementigen Familie i.a. stets k sein muß.

Ein Vergleich mit den in [1],[2],[3] angegebenen Verfahren zeigt auch dort im wesentlichen die Struktur rekursiver "Verdopplung".

Die bisherigen Ergebnisse sollen nun in einem praktisch verwendbaren Verfahren ausgewertet werden. Eine wesentliche Rolle spielen dabei insbesondere die oben schon erwähnte Vergleichsmatrix und gewisse sehr wirksame Codierungen, deren Zulässigkeit sich aus bisherigen Ergebnissen herleiten lassen wird.

$\mathfrak{L}_\sigma$ sei Familie mit $\mathfrak{L}_\sigma=\{T_{\sigma_0},\ldots,T_{\sigma_{2^k-1}}\}$ und $V(\mathfrak{L}_\sigma)=\{\nu_{k-1},\ldots,\nu_0\}$.

Dabei gilt nach II,(12):

$$\nu_{k-1}>\ldots>\nu_0 \quad \text{und}$$

$$\sigma_0<\ldots<\sigma_{2^k-1}$$

Satz 5: Jede Familie $\mathfrak{L}_\sigma$ ist genau durch das Paar $(\sigma_0,V(\mathfrak{L}_\sigma))$ eindeutig bestimmt.

Beweis: 1) Nach II, (14), (19) läßt sich $\mathfrak{L}_\sigma$ aus σ_0 und $V(\mathfrak{L}_\sigma)$ eindeutig rekonstruieren.

2) Annahme: Zu $\mathfrak{L}_\sigma$ existiert eine Familie $\mathfrak{L}_\rho$ mit $\mathfrak{L}_\rho\neq\mathfrak{L}_\sigma$, sodaß $V(\mathfrak{L}_\sigma)=V(\mathfrak{L}_\rho)$ und $\sigma_0=\rho_0$.

Daraus folgt zunächst $T_{\sigma_0}=T_{\rho_0}$, und daraus folgt mit II, Lemma 4 ein Widerspruch!

Def. 2: Jeder Familie $\mathfrak{Q}_\sigma=\{T_{\sigma_0},\ldots\}$ wird

a) $\mathrm{INDEX}(\sigma):=\sigma_0$

zugeordnet; seien zudem $a_k\in\{0,1\}$ für $k=0,\ldots,n-1$ wie folgt definiert: $a_k=1\Longleftrightarrow k\in V(\mathfrak{Q}_\sigma)$. Dann wird $\mathfrak{Q}_\sigma$ als zweite Zahl

$$\text{b) } D(\sigma):=\sum_{k=0}^{n-1} a_k\cdot 2^k$$

zugeordnet.

Es werden also der kleinste Term-Index und der Dualwert der Verwandtschaft ausgezeichnet.

Mit Satz 5 erhält man sofort:

(2) $\mathfrak{Q}_\sigma=\mathfrak{Q}_\rho\Longleftrightarrow \mathrm{INDEX}(\sigma)=\mathrm{INDEX}(\rho)$ und $D(\sigma)=D(\rho)$.

Das heißt jede Familie $\mathfrak{Q}_\sigma$ ist durch das Paar $(\mathrm{INDEX}(\sigma),D(\sigma))$ eindeutig bestimmt und umgekehrt.

Insbesondere gilt für einelementige Familien $\mathfrak{Q}_\sigma=\{T_i\}$ wegen $V(\{T_i\})=\emptyset$: $\mathrm{INDEX}(\sigma)=i$ und $D(\sigma)=0$.

Der für die Konstruktion von Oberfamilien wichtige Satz 6 aus Teil II erhält nun die folgende, für ein praktisches Verfahren anwendbare Form:

Satz 6: $\mathfrak{Q}_\sigma$ und $\mathfrak{Q}_\rho$ seien Familien in einer k-ten Rekursionsstufe, $k\geqslant 0$, die also einander nicht enthalten solien, und für die o.B.d.A. $\sigma_0<\rho_0$ gilt.

$\mathfrak{Q}_\pi=\mathfrak{Q}_\rho\cup\mathfrak{Q}_\sigma$ ist genau dann Oberfamilie, wenn gilt:

a) $D(\sigma)=D(\rho)$

b) es gibt ν mit $\mathrm{INDEX}(\rho)=\mathrm{INDEX}(\sigma)+2^\nu$ und $t_{\mathrm{INDEX}(\sigma),\nu}=0$

Für $\mathfrak{Q}_\pi$ ergibt sich dabei: a) $\mathrm{INDEX}(\pi)=\mathrm{INDEX}(\sigma)$

b) $D(\pi)=D(\sigma)+2^\nu$

Tatsächlich verwertet wird jedoch die Fassung, die sich aus II, (21) ergibt:

Satz 7: Sei NY mit dem ersten Rekursionsschritt bekannt; seien weiter wie oben auf jeder Rekursionsstufe nur Familien gegeben, die einander nicht enthalten.

Die 2^k-elementige Familie $\mathfrak{Q}_\sigma$ läßt sich genau dann zu einer 2^{k+1}-elementigen Familie erweitern, wenn gilt:

Es gibt ein ν, sodaß a) $NY(INDEX(\sigma),\nu)=1$

und b) zu $INDEX(\rho):=INDEX(\sigma)+2^\nu$ existiert eine Familie $\mathfrak{Q}_\rho$, und es ist $D(\sigma)=D(\rho)$.

Dann ist $\mathfrak{Q}_\pi=\mathfrak{Q}_\sigma \cup \mathfrak{Q}_\rho$ eine der gesuchten 2^{k+1}- elementigen Familien (für dieses spezielle ν), und es gilt:

a) $INDEX(\pi)=INDEX(\sigma)$

b) $D(\pi)=D(\sigma)+2^\nu$

Für den 0-ten Schritt, der das Aufstellen der Matrix NY erfaßt, läßt sich offenbar Satz 6 verwenden, da er auch unabhängig von der Kenntnis von NY, für die Zusammenfassung von einelementigen Familien Aussagen macht.

Das praktische Verfahren soll nun in den wesentlichen Punkten beschrieben werden; in Anlehnung an problemorientierte Programmiersprachen werden dazu die folgenden Felder vereinbart:

a) INDEX, D nehmen jeweils die Kenndaten der Familie auf, die im k-ten Verfahrensschritt darauf untersucht werden, ob mit ihnen Oberfamilien zu bilden sind.

b) INDEX1, D1 nehmen die Kenndaten der im k-ten Schritt gebildeten Oberfamilien auf.

c) INDEXZ, DZ nehmen die Kenndaten der Familien auf, die nach dem k-ten Schritt als Element von $\mathfrak{B}$ erkannt sind.
Nach Abschluß des Verfahrens liegen hier genau die Kenndaten sämtlicher Basis-Familien vor.

d) Zur Optimierung des Vergleichsaufwandes dient die zweidimensionale Vergleichsmatrix NY.

Das Verfahren unterscheidet drei Schritte:

A) Der 0-te Schritt dient der Erfassung der zu untersuchenden Charakteristik C_o und dem Aufstellen der Vergleichsmatrix.

B) Der 1-te Schritt dient unter voller Ausnutzung der Vergleichsmatrix der Bildung von zweielementigen Familien. Mit diesem Schritt wird dafür gesorgt, daß die restlichen Schritte im Zyklus ablaufen können.

C) Der k-te Schritt, k=2,3,... , ist der normale Verfahrensschritt des Zyklus.

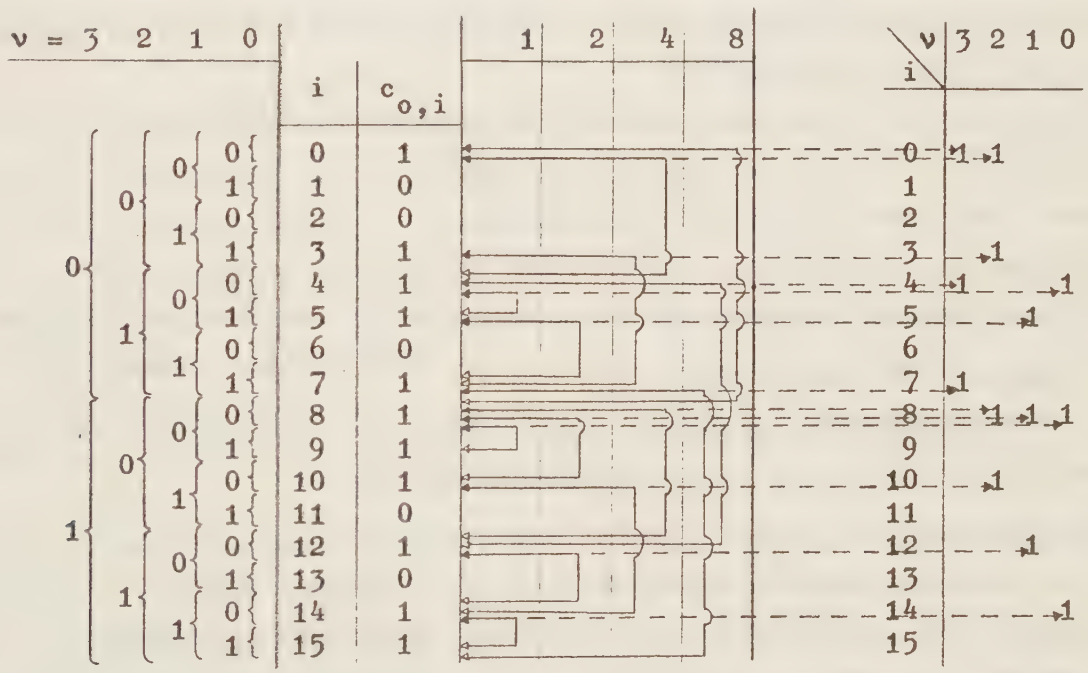
0-ter Schritt

Es ist die Charakteristik C_o gegeben; die zulässigen Terme sind also gerade durch $c_{o,i}=1$ bestimmt. Für $i=0,\ldots 2^n-1$ werden dann alle zulässigen Terme, d.h. alle $c_{o,i}$ mit $c_{o,i}=1$, auf das Auftreten von T_j mit $j=i+2^\nu$, d.h. auf $c_{o,j}=1$, untersucht und auf $t_{i,\nu}=0$, für $\nu=n-1,\ldots,0$. Trifft dies für ein Paar $(c_{o,i},\nu)$ zu, so wird das entsprechende Element von NY mit 1 besetzt: $NY(i,\nu):=1$. (Vergleiche auch S.35)
Anschließend werden die Kenndaten der zulässigen Terme (jetzt in der Interpretation als einelementige Familien mit $D(i)=0$) den Feldern INDEX und D unter fortlaufender Nummer zugewiesen.

Beispiel für n=4:

$C_o=(1,0,0,1,1,1,0,1,1,1,1,0,1,0,1,1)$

(Tab. 1)



In dieser Darstellung ist ganz links das Auftreten der Halbperioden für die ν symbolisiert; darauf folgen nach rechts die laufenden Indizes und die Komponenten der Charakteristik, die also das Auftreten von zulässigen Termen anzeigen. Es schließen sich die "Vergleichsebenen" an, auf denen "$i+2^\nu=j$" für $\nu=0,\ldots,3$ geprüft wird. Durch entsprechende Pfeile und Verbindungslinien sind die möglichen Zusammenfassungen gekennzeichnet; die gestrichelten Linien weisen auf die Auswirkung, das Setzen einer 1 in NY, hin. Nach Satz 7 bzw. II, Satz 6 ist durch die Anzahl der Einsen in NY auch für alle weiteren Schritte die maximale Zahl der wesentlichen Vergleiche gegeben. Es wird sich zeigen, daß diese Matrix , d.h. die Anzahl ihrer Einsen, im Verlauf des Verfahrens noch reduziert werden kann.

Nach dem Aufstellen der Vergleichsmatrix NY werden die Kenndaten der den zulässigen Termen entsprechenden einelementigen Familien fortlaufend in INDEX und D vermerkt. Für das Beispiel erhält man:

(Tab. 2)

i	INDEX(i)	D(i)
0	0	0
1	3	0
2	4	0
3	5	0
4	7	0
5	8	0
6	9	0
7	10	0
8	12	0
9	14	0
10	15	0

1-ter Schritt

Die Anzahl der in INDEX bzw. D gespeicherten Daten, d.h. die Anzahl der zulässigen Terme, werde mit A bezeichnet. Entsprechend werden A1 für INDEX1, D1 und AZ für INDEXZ, DZ definiert. An dieser Stelle gilt nun zunächst noch A1=AZ=0.

Für i=0,...A-1 wird für ν=0,...,n-1 geprüft, ob NY(INDEX(i),ν)=1 ist. Tritt dieser Fall ein, dann werden INDEX(i) und INDEX(i)+2^{ν} gemäß Satz 7 zusammengefaßt und die Kenndaten der resultierenden zweielementigen Oberfamilie fortlaufend etwa an die j-te Stelle von INDEX1 und D1 gebracht: INDEX1(j):=INDEX(i) , D1(j):=D(i)+2^{ν}. Damit sind die Terme $T_{INDEX(i)}$ und $T_{INDEX(i)+2^{\nu}}$ erfaßt, und INDEX(i) und INDEX(i)+2^{ν} werden intern entsprechend gekennzeichnet. Nach II, (13) gibt es zu $T_{INDEX(i)}$ bezüglich ν keine weiteren verwandten Terme.

Da die INDEX(i) , i=0,...,A-1 , aufsteigend angeordnet waren, gilt dies nach Abschluß dieses Schrittes auch für die INDEX1(j) , j=0,...,A1-1. Bleiben nach Abschluß dieses Schrittes Werte INDEX(i) übrig, die nicht gekennzeichnet sind, existieren also zulässige Terme, die nicht erfaßt wurden, so sind die zugehörigen einelementigen Familien nach Satz 7 und Satz 2 sowie nach I, Def. 20 bereits Elemente von $\mathfrak{B}$. Deren Kenndaten werden nach INDEXZ und DZ gebracht.

Abschließend werden INDEX und D wieder die Werte von INDEX1 und D1 zur Einleitung eines neuen Schrittes zugewiesen (unter Beibehaltung der Reihenfolge).

Für das angegebene Beispiel erhält man so nach Abschluß des ersten Schrittes:

(Tab.3)

j	INDEX(j)	D(j)
0	0	4
1	0	8
2	3	4
3	4	1
4	4	8
5	5	2
6	7	8
7	8	1
8	8	2
9	8	4
10	10	4
11	12	2
12	14	1

Die nebenstehende Tabelle kann man sich unmittelbar aus (Tab.1) abschreiben. Die Vergleichsmatrix NY wird in diesem Beispiel in diesem Schritt nicht reduziert sie hat also weiterhin die in (Tab.1) gegebene Form.

Weiter wurden in dem Beispiel alle INDEX(i) erfaßt, es gilt also noch AZ=0, d.h. es treten bisher noch keine Basis-Familien auf.

(3) Für die Ordnung in diesen Tabellen kann man offenbar nach dem, was oben gesagt wurde, folgende Beziehungen angeben:

$$(INDEX(j),D(j)) \prec (INDEX(k),D(k)) \Longleftrightarrow (INDEX(j)<INDEX(k)) \vee (INDEX(j)=INDEX(k) \wedge D(j)<D(k))$$

Entsprechendes gilt natürlich für INDEX1 und D1.

2-ter Schritt

(Statt des allgemeinen k-ten Schrittes wird hier der 2-te Schritt beschrieben, weil damit im Zusammenhang mit den ersten beiden Schritten eine größere Übersichtlichkeit erlangt wird. Insbesondere läßt sich dabei die weitere Behandlung des Beispiels besser verfolgen. Selbstverständlich läuft jeder k-te Schritt mit k>2 ganz analog ab.)

Wie im ersten Schritt wird INDEX(i) für i=0,...,A-1 für jedes ν=0,1,... darauf geprüft, ob NY(INDEX(i),ν)=1 ist. Im Gegensatz zum ersten Schritt kann der Fall eintreten, daß trotz NY(INDEX(i),ν)=1 für kein j gilt: INDEX(i)+2^{ν}=INDEX(j). In diesem Fall kann nach Satz 7 auch in keinem weiteren Schritt zu INDEX(i) ein solches INDEX(j) existieren. NY kann also hier reduziert werden: NY(INDEX(i),ν):=0 .
Existiert jedoch INDEX(j)=INDEX(i)+2^{ν}, so muß nach Satz 7 weiter geprüft werden, ob D(i)=D(j) gilt. Trifft dies zu, dann ist eine Oberfamilien-Bildung möglich, und es nur noch zu untersuchen, ob diese Familie bereits auf anderem Wege gebildet wurde, ob also ihre Kenndaten bereits abgespeichert sind. In diesem Fall unterbleibt eine neue Abspeicherung. Im anderen Fall werden die Kenndaten der neuen Familie nach INDEX1 und D1 gebracht, INDEX(i) und D(i) werden als erfaßt gekennzeichnet.

Nach II, Lemma 12 gibt es nämlich zu der (INDEX(i),D(i)) entsprechenden Familie bezüglich ν keine weitere Familie, die zu einer Oberfamilien-Bildung Anlaß gäbe.
Nach Abschluß des zweiten Schrittes bezeichnen die nicht gekennzeichneten INDEX(i) wieder Kenndaten von Basiselementen. Solche INDEX(i) und D(i) werden nach INDEXZ und DZ gebracht. Darauf werden für j=0,...,A1-1 INDEX und D die Werte von INDEX1 und D1 zugewiesen.

(4) Man erkennt, daß sich die in (3) beschriebene Ordnung der Tabellen stets regeneriert.

Das Verfahren bricht ab, wenn von dem im k-ten Schritt durch die Kenndaten INDEX und D gegebenen Familien keine mehr zu einer Oberfamilien-Bildung geeignet sind. Diese sämtlichen Kenndaten werden abschließend nach INDEXZ und DZ gespeichert, wie es der normale k-te Verfahrensschritt ohnehin vorsieht, dort liegen dann die Kenndaten sämtlicher Basis-Familien vor.

Für das Beispiel erhält man im zweiten Schritt:

(Tab. 4)

j	INDEX1(j)	D1(j)	
0	0	12	(0,8) mit (4,8)
	0	12	(0,4) mit (8,4)
1	8	6	(8,2) mit (12,2)
	8	6	(8,4) mit (10,4)

(Tab. 5)

i	INDEXZ(i)	DZ(i)
0	3	4
1	4	1
2	5	2
3	7	8
4	8	1
5	14	1

(Tab. 4) gibt die Kenndaten der im zweiten Schritt gebildeten Oberfamilien an; zusätzlich ist die Bezugnahme auf die vorgegebenen Familien angedeutet (vergleiche (Tab. 3)). Die gestrichelten Linien weisen auf eine unterdrückte Doppelbildung von Oberfamilien hin. (Tab. 5) gibt die Kenndaten der im zweiten Schritt als Basis-Familien erkannten Familien an.

Nach dem zweiten Schritt hat die Vergleichsmatrix NY die folgende reduzierte Form:

(Tab. 6)

i \ ν	3	2	1	0
0	1	1		
1				
2				
3		1		
4	1			1
5			1	
6				
7				
8		1	1	
9				
10		1		
11				
12			1	
13				
14				
15				

Für den dritten Schritt erhält man als Kenndaten der zur Verfügung stehenden Familien:

(Tab. 7)

i	INDEX(i)	D(i)
0	0	12
1	8	6

Es ist also keine weitere Oberfamilien-Bildung mehr möglich.

Man erhält somit insgesamt die folgenden Basis-Kenndaten:

(Tab. 8)

i	INDEXZ(i)	DZ(i)	
0	3	4	nach (Tab. 5)
1	4	1	
2	5	2	
3	7	8	
4	8	1	
5	14	1	
6	0	12	nach (Tab. 7)
7	8	6	

Nach dem Abbruch des Verfahrens werden die Basis-Kenndaten decodiert; man erhält so zu jeder Basis-Familie $\mathfrak{B}_\sigma$ die Verwandtschaft $V(\mathfrak{B}_\sigma)$ und σ_0. Daraus lassen sich die zu $\mathfrak{B}_\sigma$ gehörenden Terme bestimmen, wie später noch erläutert werden wird.
Für das angegebene Beispiel erhält man so (vergleiche (Tab. 8)):

(Tab. 9)

Basis-Familie	reduzierter Minterm	partielle konjunktive Form
$\mathfrak{B}_0=\{T_3, T_7\}$	$\hat{=}$ 0,-,1,1	$\hat{=}\ \bar{x}_3\wedge\ x_1\wedge x_0 = PKF_0$
$\mathfrak{B}_1=\{T_4, T_5\}$	$\hat{=}$ 0,1,0,-	$\hat{=}\ \bar{x}_3\wedge x_2\wedge\bar{x}_1\wedge = PKF_1$
$\mathfrak{B}_2=\{T_5, T_7\}$	$\hat{=}$ 0,1,-,1	$\hat{=}\ \bar{x}_3\wedge x_2\wedge\ x_0 = PKF_2$
$\mathfrak{B}_3=\{T_7, T_{15}\}$	$\hat{=}$ -,1,1,1	$\hat{=}\ x_2\wedge x_1\wedge x_0 = PKF_3$
$\mathfrak{B}_4=\{T_8, T_9\}$	$\hat{=}$ 1,0,0,-	$\hat{=}\ x_3\wedge\bar{x}_2\wedge\bar{x}_1\wedge = PKF_4$
$\mathfrak{B}_5=\{T_{14}, T_{15}\}$	$\hat{=}$ 1,1,1,-	$\hat{=}\ x_3\wedge x_2\wedge x_1\wedge = PKF_5$
$\mathfrak{B}_6=\{T_0, T_4, T_8, T_{12}\}$	$\hat{=}$ -,-,0,0	$\hat{=}\ \bar{x}_1\wedge\bar{x}_0 = PKF_6$
$\mathfrak{B}_7=\{T_8, T_{10}, T_{12}, T_{14}\}$	$\hat{=}$ 1,-,-,0	$\hat{=}\ x_3\wedge\ \bar{x}_0 = PKF_7$

Die rechts aufgeführten partiellen konjunktiven Formen stellen also gerade die Primimplikanten dar; deren Disjunktion ergibt eine spezielle disjunktive Partialform N^* mit $N^*(x)=\bigvee_{i=0}^{7} PKF_j(x)$ und $g(N^*)=C_o$.

N^* wird natürlich im allgemeinen noch keine minimale Bewertung haben.

Den Abschluß des Teil III soll, parallel zum theoretischen Optimalitätsnachweis für das Verfahren, eine praktische Abschätzung der Güte des Verfahrens bilden. Zum Vergleich wird eine Abschätzung des Verfahrens nach McCluskey - siehe etwa die eingehende Beschreibung in [1] - durchgeführt. Es handelt sich dabei um eine Untersuchung der Größenordnungen der Anzahlen der wesentlichen Vergleichsschritte. Demgemäß stellen die Ergebnisse der einzelnen Abschätzungsschritte nur ungefähre Werte dar.

(Der Einfachheit halber wurden zur Herleitung der Abschätzungsformeln n-stellige Terme in naheliegender Weise durch die entsprechenden n-stelligen Dualzahlen, 2^k-elementige Familien durch die entsprechenden, an k Stellen mit Strichen versehenen Dualzahlen ersetzt - vergleiche die reduzierten Minterme in (Tab.9), und siehe auch II, Seite 30.)

Zu vorgegebenem n sei $A_0=|\mathfrak{B}_0|\leqslant 2^n$; es ist damit A_0 die Anzahl der 2^0-elementigen Familien, und man erhält für die Anzahl A_k der im k-ten Schritt des Verfahrens erhaltenen 2^k-elementigen Familien als Schätzwert:

$$(5) \qquad A_k \tilde{=} 2^{-k}\binom{n}{k}\cdot A_0$$

Ist a_i die Anzahl der n-stelligen Dualzahlen, die in ihrer Darstellung i Einsen aufweisen, dann gilt exakt:

$$(6) \qquad a_i = \binom{n}{i}$$

Sind allgemein statt 2^n nur A_0 Dualzahlen vorgegeben, so erhält man analog zu (6) eine Abschätzung für die Anzahl der darunter auftretenden Dualzahlen mit i Einsen:

$$(7) \qquad a_i \tilde{=} \binom{[\mathrm{ld}_i A_0]}$$

Im McCluskey-Verfahren haben die 2^k-elementigen Familien eine Darstellung als reduzierte Minterme mit k Strichen (vergleiche auch die obigen Erläuterungen). Diese wiederum entsprechen n-k-stelligen Dualzahlen, sodaß man entsprechend (7) für die Anzahl dieser reduzierten Terme mit i Einsen für den k-ten Schritt als Abschätzung erhält:

$$(8) \qquad a_i^k \tilde{=} \binom{[\mathrm{ld}_i A_k]}$$

Es sei $\mathfrak{A}_i^k$ die Klasse der im k-ten Schritt vorliegenden reduzierten Terme mit i Einsen.
Das bei McCluskey benutzte Verfahren zur Bestimmung der Primimplikanten vergleicht im k-ten Schritt für i=0,...,n-1 jedes Element aus $\mathfrak{A}_i^k$ mit jedem Element aus $\mathfrak{A}_{i+1}^k$ für k=0,...,n-1 auf die Möglichkeit einer Zusammenfassung.

Da offenbar die Klassen $\mathfrak{A}_i^k$ eine disjunkte Zerlegung der Menge der 2^k-elementigen Familien bilden, und da diese Familien reduzierten Mintermen mit k Strichen entsprechen, gilt für die a_i^k :

$$(9) \qquad \sum_{i=0}^{n-k} a_i^k = A_k \qquad \text{für} \quad k=0,\ldots,n-1$$

Diese Beziehung ist mit (8) natürlich nur insofern verträglich, als (8) eine Schätzung darstellt.

Wertet man nun für den Arbeitsaufwand des McCluskey-Verfahrens jeden Vergleich reduzierter Minterme in der oben beschriebenen Form bezüglich der jeweiligen Klassen $\mathfrak{A}_i^k$ und $\mathfrak{A}_{i+1}^k$, so erhält man für den Arbeits- oder Vergleichsaufwand V als Schätzwert:

$$(10) \qquad V \simeq \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-k} a_i^k \cdot a_{i+1}^k$$

Diese Beziehung wird durch Mittelwertbildungen weiter abgeschätzt:

a_{i+1}^k wird für i=0, ..,n-k gemäß (9) ersetzt durch $\frac{A_k}{n-k+1}$;

A_k wird für k=0,...,n-1 gemäß (5) durch $2^{-k}\binom{n}{k}\cdot A_0$ ersetzt, sodaß man wegen $\sum_{k=0}^{n-1} A_k = A_0 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-k}\binom{n}{k} \simeq \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot A_0$ als Mittelwert in etwa $A_k \simeq \frac{1}{n}\left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot A_0$ erhält. Damit ergibt sich aus (10):

$$(11) \qquad V \simeq \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{A_k}{n-k+1} \cdot \sum_{i=0}^{n-k} a_i^k\right) \simeq \frac{1}{n^2}\left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot A_0 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-k} a_i^k$$

$$\Longrightarrow V \simeq \frac{A_0^2}{n^2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2n}$$

Hier ist also als "Elementarvergleich" der Vergleich zweier reduzierter Terme angesehen worden; es ist nun etwas problematisch, für das in der Arbeit entwickelte Verfahren hierzu ein Äquivalent anzugeben. Sicher wäre es hierbei nicht gerechtfertigt, den obigen Ansatz zu übernehmen, da ja hier von je zwei reduzierten Termen(Familien) nur die zwei Daten INDEX und D verglichen werden müssen, von denen zumindest INDEX fast vollständig determiniert ist. Das zeigt das folgende Schema der Tabelle, das sich unmittelbar aus den Seiten 58 ff. ergibt:

D	$..D_{i_1}\ D_i\ D_{i_2}..\ldots..D_{j_{i,\nu-1}}\ldots..$
INDEX	$..i_1 \leqslant i \leqslant i_2\ldots..j_{i,\nu-1}=i+2^{\nu-1}..j_{i,\nu}=i+2^{\nu}..j_{i,\nu+1}=i+2^{\nu+1}...$

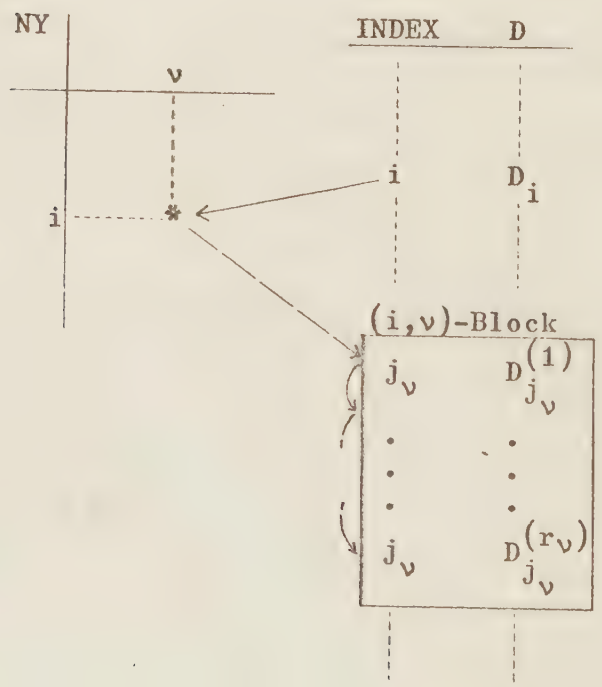
(Dabei sind wegen der komplizierten Indexzuweisung nicht alle D eingetragen.)

Insbesondere erhält man den einem i zugehörigen (i,ν)-Block in dieser Tabelle:

$$..D_{j_0}^{(\varkappa)}\ ..\ldots D_j^{(1)}\ \ldots D_j^{(r_\nu)}\ \ldots..D_{j_{n-1}}^{(\xi)}\ ..\ \ldots$$

$$..j_0=i+2^0..\ldots\underbrace{j_\nu=i+2^\nu\ldots j_\nu=i+2^\nu}_{(i,\nu)\text{-Block}}\ldots..j_{n-1}=i+2^{n-1}..\ \ldots$$

Wie man trotz der unübersichtlichen Indexverhältnisse wohl sieht, sind die i und die zugehörigen (i,ν)-Blöcke in der (INDEX,D)-Tabelle - abgesehen von den jeweiligen "Anfangsadressen"- vollständig determiniert angeordnet. Die Zuweisung einer durch (i,D_i) gegebenen Familie (bzw. red. Minterm) zum zugehörigen (i,ν)-Block geht dabei für festes ν auf folgende Weise vor sich:



Ist $NY(i,\nu)=1$, dann wird in INDEX die (durch die vorigen Vergleiche bereits festgeleg Stelle in INDEX aufgesucht, an der zum ersten Mal $j_\nu=i+2^\nu$ erscheint. Darauf wird der (i,ν)-Block auf "$D_i=D_{j_\nu}^{(\varkappa)}$" durchgeprüft: ob also eine Oberfamilien-Bildung (Zusammenfassung red. Minterme) möglich ist.

Diese Struktur des Verfahrens läßt es plausibel erscheinen, den gesamten Vergleich einer durch (i,D_i) gegebenen Familie mit dem zugehörigen (i,ν)-Block für festes ν als <u>einen</u> wesentlichen Vergleichsschritt anzusehen.
Da ν von 0 bis n-1 läuft, für je zwei Familien aber nur höchstens (abhängig von NY) ein Vergleich echt durchgeführt wird, erhält man so im k-ten Schritt des Verfahrens (k=0,...,n-1) als Schätzung für die Anzahl der Vergleiche:

(12) $$\tilde{V}_k \simeq \frac{n}{2}\cdot A_k \quad , \quad \text{sodaß man insgesamt erhält:}$$

(13) $$\tilde{V} \simeq \frac{n}{2}\cdot \sum_{k=0}^{n-1} A_k \simeq \frac{n}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot A_0$$

Damit ergibt sich die folgende Gegenüberstellung:

(14) $$V \simeq \frac{A_0^2}{n^2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2n} \quad , \quad \tilde{V} \simeq \frac{n}{2}\cdot A_0\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$\text{mit} \quad \lambda = \frac{V}{\tilde{V}} \simeq \frac{2}{n^3}\cdot A_0\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

Es liegt auf der Hand, daß λ für wachsende n sehr stark anwächst.
Für $A_0=2^{n-1}$ (Belegung der Charakteristik mit der Hälfte aller möglichen Einsen) erhält man $\lambda \simeq \frac{3^n}{n^3}$, wofür man im einzelnen - auf ganze Zahlen abgerundet - berechnet:

n	1	2	3	4	5	6	10	20	...
λ	3	1	1	1	2	3	62	$45\cdot10^4$	...

Es soll abschließend noch einmal ausdrücklich betont werden, daß diese Aussagen sich nur ganz global auf Größenordnungen beziehen, und daß die Gegenüberstellung der Vergleichsschritte der beiden Verfahren eine formelmäßig kaum zu erfassende Problematik enthält.

IV) Bestimmung der bewertungsminimalen Überdeckungssysteme von $\mathfrak{S}_0$

Auf Seite 20 wurde festgestellt, daß das vorgelegte Minimierungsproblem dem folgenden Überdeckungsproblem äquivalent ist:

(1) Aus der Menge der Familiensysteme $\mathfrak{T}' \subset \mathfrak{B}$ mit $\bigcup_{\mathfrak{B} \in \mathfrak{T}'} \mathfrak{B} = \mathfrak{S}_0$

sind solche mit minimaler Bewertung $E(\mathfrak{T}')$ gesucht.

Die Theorie der Minimalüberdeckungen ist unter Angabe von Lösungsverfahren in [5] ausführlich dargestellt, insbesondere auch in Bezug auf das Minimierungsproblem.
Daher soll hier das in [6] angegebene Überdeckungsverfahren nur kurz der Vollständigkeit halber angegeben werden; auf exakte Beweise wurde zum Teil verzichtet, da sie in [6] ausführlich gegeben sind.

Es werden zunächst einige Begriffe eingeführt, die im Hinblick auf die Behandlung des "don't-care" und des Vorgabefalles etwas allgemeiner gehalten sind, als dies etwa in [6] der Fall ist. Dies spielt insofern (auch für die Beweise) keine wesentliche Rolle, als der inhaltliche Zusammenhang zwischen $\mathfrak{S}_0$ und $\mathfrak{T}_0$ für die Behandlung des Überdeckungsproblems ohnehin keine Bedeutung hat.

Def. 1: Seien $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{P}(\mathfrak{S})$.

a) $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{T}$ heißt Kern von $\mathfrak{B}$ genau dann, wenn gilt:

1) $\mathfrak{B} \subset \bigcup_{K \in \mathfrak{K}} K$

2) $\mathfrak{B} \not\subset \bigcup_{K \in \mathfrak{K} - \{K^*\}} K$ für alle $K^* \in \mathfrak{K}$

b) $\overset{\wedge}{\mathfrak{K}}(\mathfrak{B},\mathfrak{T})$ sei die Menge aller dieser Kerne.

Man erkennt, daß Kerne bezüglich der Inklusion ordnungsminimal sind. Es wird sich zeigen, daß bewertungsminimale Überdeckungssysteme in jedem Fall auch ordnungsminimal sein müssen; damit ist der Zusammenhang mit den Kernen hergestellt, und es ist die Einführung des Begriffs "Kern" motiviert.

Def. 2: a) $\mathfrak{K} \in \overset{\wedge}{\mathfrak{K}}(\mathfrak{B},\mathfrak{T})$ heißt Minkern, wenn $\mathfrak{K}$ in $\overset{\wedge}{\mathfrak{K}}(\mathfrak{B},\mathfrak{T})$ minimale Bewertung hat.

b) $\overset{\wedge}{\mathfrak{K}}_0(\mathfrak{B},\mathfrak{T})$ sei die Menge aller dieser Minkerne.

Offenbar gilt:

(2) $\overset{\wedge}{\mathfrak{K}}_0(\mathfrak{S}_0,\mathfrak{B}) \subset \overset{\wedge}{\mathfrak{K}}(\mathfrak{S}_0,\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{P}(\mathfrak{B})$

Zur oben angesprochenen Motivierung des Kern-Begriffs gelangt man über die folgenden Ergebnisse bezüglich der Bewertung von Familiensystemen:

Lemma 1: Sei $\mathfrak{T}=\{\mathfrak{Q}_1,\ldots,\mathfrak{Q}_k\} \subset \mathfrak{T}_o$; dann gilt:

$$E(\mathfrak{T}) = k\cdot(n+1)-1 - \sum_{j=1}^{k}|V(\mathfrak{Q}_j)|$$

Der Beweis folgt im wesentlichen aus I, Def. 14 und Def. 19

Lemma 2: Es seien $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ Familiensysteme, d.h. $\mathfrak{T}_1,\mathfrak{T}_2 \subset \mathfrak{T}$.
Dann gilt:

$$\mathfrak{T}_1 \subsetneq \mathfrak{T}_2 \Longrightarrow E(\mathfrak{T}_1) < E(\mathfrak{T}_2)$$

Beweis: $\mathfrak{T}_1 \subsetneq \mathfrak{T}_2 \Longrightarrow \mathfrak{T}_1=\{\mathfrak{Q}_1,\ldots,\mathfrak{Q}_k\}$ und $\mathfrak{T}_2=\{\mathfrak{Q}_1,\ldots,\mathfrak{Q}_k,\ldots,\mathfrak{Q}_{k+r}\}$, $r\geq 1$

$$\Longrightarrow E(\mathfrak{T}_2)-E(\mathfrak{T}_1)=r\cdot(n+1) - \sum_{i=1}^{r}|V(\mathfrak{Q}_{k+i})| \text{ , nach Lemma 1}$$

$\Longrightarrow E(\mathfrak{T}_2)-E(\mathfrak{T}_1)\geq r\geq 1$, da wegen $|\mathfrak{Q}_i|\leq 2^n$ auch $|V(\mathfrak{Q}_i)|\leq n$ gilt.

Aus Lemma 2 folgt:

(3) Von einer geordneten Kette von Überdeckungssystemen $\mathfrak{T}_1\subset\ldots\subset\mathfrak{T}_r\subset\bar{\mathfrak{T}}$ von $\mathfrak{B}$ kann nur das ordnungsminimale System $\mathfrak{T}_1$ auch bewertungsminimal sein.

Damit ist gezeigt:

Satz 1: Bewertungsminimale Überdeckungssysteme müssen notwendig Kerne sein; nach Def. 2 ist daher $\mathfrak{K}\subset\bar{\mathfrak{T}}$ genau dann bewertungsminimales Überdeckungssystem von $\mathfrak{B}$, wenn $\mathfrak{K}\in \hat{K}_o(\mathfrak{B},\bar{\mathfrak{T}})$ gilt, wenn $\mathfrak{K}$ also Minkern ist.

Das Überdeckungsverfahren, das im folgenden hier beschrieben werden wird, wird in einer Bestimmung von $\hat{K}(\mathfrak{B},\bar{\mathfrak{T}})$ bestehen, woraus dann anschließend durch explizite Berechnung der Bewertungen $\hat{K}_o(\mathfrak{B},\bar{\mathfrak{T}})$ bestimmt werden kann. Mit $\mathfrak{B}:=\mathfrak{F}_o$ und $\bar{\mathfrak{T}}:=\mathfrak{B}$ erhält man damit die Lösung des Minimierungsproblems; durch entsprechend modifizierte Realisierungen von $\mathfrak{B}$ und $\bar{\mathfrak{T}}$ ergeben sich die Lösungen des selben Problems im "don't-care"- und im Vorgabefall. Dazu soll noch kurz ein Lemma vermerkt werden:

Lemma 3: Seien $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2$ mit $\mathfrak{T}_1 \subset \mathfrak{T}_2$ gegeben.
Für je zwei $\mathfrak{K}_1 \in \hat{\mathfrak{K}}_o(\mathfrak{B}, \mathfrak{T}_1)$ und $\mathfrak{K}_2 \in \hat{\mathfrak{K}}_o(\mathfrak{B}, \mathfrak{T}_2)$ gilt dann $E(\mathfrak{K}_1) \geq E(\mathfrak{K}_2)$

Beweis: $\mathfrak{K}_1 \subset \mathfrak{T}_1 \subset \mathfrak{T}_2$, also ist $\mathfrak{K}_1 \in \hat{\mathfrak{K}}(\mathfrak{B}, \mathfrak{T}_2)$, womit nach Def. 2 wegen $\mathfrak{K}_2 \in \hat{\mathfrak{K}}_o(\mathfrak{B}, \mathfrak{T}_2)$ bereits alles gezeigt ist.

Das Verfahren hat den folgenden konstruktiven Aufbau:
Sei $\mathfrak{T} = \{\mathfrak{Q}_1, \ldots, \mathfrak{Q}_r\}$, $\mathfrak{B} = \{T_{i_1}, \ldots T_{i_s}\}$; um $\mathfrak{B}$ zu überdecken, muß jedenfalls jedes T_i von einem geeigneten $\mathfrak{Q}_j$ erfaßt werden. Das sei o.B.d.A. vorausgeset
Darauf wird zuerst zu T_{i_1} die Menge derjenigen $\mathfrak{Q}_j$ mit $T_{i_1} \in \mathfrak{Q}_j$ bestimmt.
Hat $\mathfrak{Q}_j$ diese Eigenschaften, dann wird T_{i_2} geprüft, ob $T_{i_2} \in \mathfrak{Q}_j$ gilt; ist dies der Fall, so wird $\mathfrak{B}$ weiter durchlaufen. Im anderen Fall gibt es $\mathfrak{Q}'_j$ mit $T_{i_1} \in \mathfrak{Q}'_j$. Damit erhält man sukzessiv die Überdeckungseigenschaft.

Zusätzlich muß man dann noch die spezielle Kern-Eigenschaft (Def. 1, b)) im Auge behalten.

Zur besseren formalen Beschreibung dieses Vorgehens ist der Begriff "Rand" von Nutzen:

Def. 3: Es seien $T \in \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{T}$.
Dann heißt $\mathfrak{R}_{\mathfrak{U}}(T) = \{U \mid U \in \mathfrak{U},\ T \in U\}$ der Rand von T bezüglich $\mathfrak{U}$.

Für die exakte Formulierung des Überdeckungsverfahrens sind noch einige Lemmata notwendig, deren Beweise gemäß der obigen Verabredung jedoch zumeist nur skizzenhaft sind.

Lemma 4: Es seien $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ gegeben mit $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2$. Ist dann $\mathfrak{K} \in \hat{\mathfrak{K}}(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{T})$, sodaß auch noch $\mathfrak{B}_2 \subset \bigcup_{K \in \mathfrak{K}} K$ gilt, dann ist auch $\mathfrak{K} \in \hat{\mathfrak{K}}(\mathfrak{B}_2, \mathfrak{T})$.

Beweis: Es ist nur noch a)2) von Def. 1 zu beweisen:
Existiert $K^* \in \mathfrak{K}$, sodaß $\mathfrak{K} - \{K^*\}$ bereits $\mathfrak{B}_2$ überdeckt, dann überdeckt das gleiche System auch $\mathfrak{B}_1$ nach Voraussetzung, sodaß $\mathfrak{K}$ in diesem Fall auch kein Kern von $\mathfrak{B}_1$ ist. Widerspruch!

Aus diesem Lemma erhält man mit Def. 1 unmittelbar

Lemma 5: Sei $\mathfrak{K}$ Kern von $\mathfrak{B}$ und $T \notin \mathfrak{B}$. Dann gilt:
$\mathfrak{K}$ Kern von $\mathfrak{B} \cup \{T\} \Longleftrightarrow \mathfrak{R}_{\mathfrak{K}}(T) \neq \emptyset$

Das nächste Lemma macht eine Aussage darüber, daß man Überdeckungssysteme, die keine Kerne sind, immerhin unter Umständen zu Kernen reduzieren kann:

Lemma 6: Mit $T \notin \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}^* = \mathfrak{B} \cup \{T\}$ sei $\mathfrak{K}^*$ Kern von $\mathfrak{B}^*$. Dann gilt:
$\mathfrak{K}^*$ kein Kern von $\mathfrak{B} \Longleftrightarrow$ es gibt $K \in \mathfrak{K}_{\mathfrak{K}^*}(T)$, sodaß
$\mathfrak{K}^* - \{K\}$ Kern von $\mathfrak{B}$ ist.

Beweis: Jedenfalls gibt es K' so, daß $\mathfrak{K}^* - \{K'\}$ noch $\mathfrak{B}$ überdeckt; dabei ist $T \in K'$, weil sonst $\mathfrak{K}^*$ kein Kern von $\mathfrak{B}^*$ wäre.
Annahme: Für kein solches K' ist $\mathfrak{K}^* - \{K'\}$ Kern von $\mathfrak{B}$.
Dann gibt es nach Def. 1 aber K", sodaß $\mathfrak{K}^* - \{K', K''\}$ noch $\mathfrak{B}$ überdeckt. Wegen $T \in K'$ überdeckt dann $\mathfrak{K}^* - \{K''\}$ aber $\mathfrak{B}^*$;
$\mathfrak{K}^*$ ist also kein Kern von $\mathfrak{B}^*$, Widerspruch!

Lemma 7: $\mathfrak{K}$ sei Kern von $\mathfrak{B}$, $T \notin \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}^* = \mathfrak{B} \cup \{T\}$. Weiter sei $\mathfrak{K}_{\Sigma}(T) = \{\mathfrak{L}_1, \ldots, \mathfrak{L}_r\}$, aber $\mathfrak{K}_{\mathfrak{K}}(T) = \emptyset$.

Dann sind zunächst $\mathfrak{K}^* = \mathfrak{K} \cup \{\mathfrak{L}_j\}$ Überdeckungssystem von $\mathfrak{B}^*$, $j = 1, \ldots, r$, und es gilt:
$\mathfrak{K}_j^*$ kein Kern von $\mathfrak{B}^* \Longleftrightarrow$ es gibt einen Kern $\mathfrak{K}'$ von $\mathfrak{B}$ mit
a) $\mathfrak{K}' \subsetneq \mathfrak{K}_j^*$ und
b) $\mathfrak{K}_{\mathfrak{K}'}(T) \neq \emptyset$

Beweis: "$\Longrightarrow$"
Sei j beliebig aber fest gewählt. Es gibt nach Def. 1 $K \in \mathfrak{K}_j^*$, sodaß $\mathfrak{K}_j^* - \{K\}$ noch $\mathfrak{B}^*$ überdeckt. Zwei Fälle werden unterschieden:

1) $\mathfrak{K}_j^* - \{K\}$ ist Kern von $\mathfrak{B}^*$; nach Lemma 6 ist dann schon alles bewiesen.
2) $\mathfrak{K}_j^* - \{K\}$ ist kein Kern von $\mathfrak{B}^*$; dann kann man sukzessiv weitere K' u.s.f. abspalten, bis schließlich für $\mathfrak{K}^* - \{K, K', \ldots\}$ sinngemäß Fall 1) eintritt. Diese Situation muß wegen der Endlichkeit des Problems jedenfalls nach endlich vielen Schritten eintreten.

"$\Longleftarrow$"
Aus Lemma 5 folgt, daß $\mathfrak{K}'$ auch Kern von $\mathfrak{B}^*$ ist.
Wegen $\mathfrak{K}' \subsetneq \mathfrak{K}_j^*$ ist auch noch $\mathfrak{K}' \subset \mathfrak{K}_j^* - \{K\}$ für ein $K \in \mathfrak{K}'$.
Daraus folgt nach Def. 1 insgesamt, daß $\mathfrak{K}_j^*$ kein Kern von $\mathfrak{B}^*$ ist.

Die Aussagen von Lemma 5 und Lemma 7 sollen nun dazu benutzt werden, ein Verfahren anzugeben, mit dessen Hilfe man aus der Kenntnis sämtlicher Kerne von $\mathfrak{B}$ sämtliche Kerne von $\mathfrak{B}^*=\mathfrak{B}\cup\{T\}$, für $T\notin\mathfrak{B}$, erhalten kann.

(V) Sei zunächst $\overset{\frown}{\mathfrak{K}}$ als Menge der paarweise verschiedenen Kerne von $\mathfrak{B}$ gegeben. Jedes $\mathfrak{K}\in\overset{\frown}{\mathfrak{K}}$ wird dann auf folgende Weise gegebenenfalls zu einem Kern $\mathfrak{K}^*$ von $\mathfrak{B}^*$ erweitert:

1) $\mathfrak{R}_{\mathfrak{K}}(T)\neq\emptyset$: Dann ist nach Lemma 5 bereits $\mathfrak{K}^*=\mathfrak{K}$ Kern von $\mathfrak{B}^*$.

2) $\mathfrak{R}_{\mathfrak{K}}(T)=\emptyset$: Es sei $\mathfrak{R}_{\overline{\Sigma}}(T)=\{\mathfrak{Q}_1,\ldots,\mathfrak{Q}_r\}$. Dann ist $\mathfrak{K}_i^*=\mathfrak{K}\cup\{\mathfrak{Q}_i\}$ nach Lemma 7 Kern von $\mathfrak{B}^*$ genau dann, wenn kein $\mathfrak{K}'\in\overset{\frown}{\mathfrak{K}}$ existiert mit a) $\mathfrak{K}'\subsetneq\mathfrak{K}_i^*$ und $(i=1,\ldots,r)$
b) $\mathfrak{R}_{\mathfrak{K}'}(T)\neq\emptyset$

Satz 2: Wird $\overset{\frown}{\mathfrak{K}}$ als bekannt vorausgesetzt, so liefert die sukzessive Anwendung von (V) genau alle paarweise verschiedenen Kerne von $\mathfrak{B}^*$.

Beweis: Daß durch (V) überhaupt nur Kerne von $\mathfrak{B}^*$ geliefert werden, liegt nach Lemma 5 und Lemma 7 auf der Hand.
Zu zeigen ist daher nur noch:
a) Jeder Kern von $\mathfrak{B}^*$ ist mit Hilfe von (V) darstellbar.
b) Das Ergebnis der Anwendung von (V) auf $\overset{\frown}{\mathfrak{K}}$ sind lauter paarweise verschiedene Kerne von $\mathfrak{B}^*$.

Zu a): Sei $\mathfrak{K}^*$ Kern von $\mathfrak{B}^*$; dann ist sicher $\mathfrak{R}_{\mathfrak{K}^*}(T)\neq\emptyset$.

α) $\mathfrak{K}^*$ ist auch bereits Kern von $\mathfrak{B}$. Dann wird $\mathfrak{K}^*$ gemäß (V), 1) erfaßt.

β) $\mathfrak{K}^*$ ist kein Kern von $\mathfrak{B}$. Dann gibt es nach Lemma 6 $K\in\mathfrak{R}_{\mathfrak{K}^*}(T)$, sodaß $\mathfrak{K}'=\mathfrak{K}^*-\{K\}$ aus $\overset{\frown}{\mathfrak{K}}$ ist.

Dabei ist sicher $\mathfrak{R}_{\mathfrak{K}'}(T)=\emptyset$, sonst wäre bereits $\mathfrak{K}'$ Kern von $\mathfrak{B}^*$. Ganz entsprechend gilt allgemein, daß es kein $\mathfrak{K}''\subsetneq\mathfrak{K}^*$ gibt mit $\mathfrak{R}_{\mathfrak{K}'}(T)\neq\emptyset$.

Wegen $K\in\mathfrak{R}_{\mathfrak{K}^*}(T)\subset\mathfrak{R}_{\overline{\Sigma}}(T)$ - also etwa $K=\mathfrak{Q}_i$ - und $\mathfrak{K}'\in\overset{\frown}{\mathfrak{K}}$ ist dann $\mathfrak{K}'$ Anlaß, $\mathfrak{K}^*=\mathfrak{K}'\cup\{\mathfrak{Q}_i\}$ als Kern von $\mathfrak{B}^*$ zu bilden.

Zu b): Zu zeigen ist, daß für irgend zwei gemäß (V) erhaltene Kerne $\mathfrak{K}_1^*$ und $\mathfrak{K}_2^*$ stets $\mathfrak{K}_1^*\neq\mathfrak{K}_2^*$ gilt.

Angenommen, es gilt für ein Paar solcher Kerne die Gleichheit. Dann gibt es entsprechend a) zwei Fälle zu unterscheiden:

α) $\mathfrak{K}_1^*$ und $\mathfrak{K}_2^*$ sind bereits Kerne von $\mathfrak{B}$. Dann steht die Gleichheit im Widerspruch zu den Voraussetzungen über $\hat{\mathfrak{K}}$.

β) $\mathfrak{K}_1^*$ und $\mathfrak{K}_2^*$ sind beides keine Kerne von $\mathfrak{B}$.
Nach Lemma 6 gibt es dann $K_i \in \mathfrak{K}_i^*$ mit $T \in K_i$, $i=1,2$,
sodaß $\mathfrak{K}_i' = \mathfrak{K}_i^* - \{K_i\}$ Kerne von $\mathfrak{B}$ sind.
Da $\hat{\mathfrak{K}}$ aber nicht zwei gleiche Kerne enthält,
folgt aus der Annahme : $K_1 \in \mathfrak{K}_2'$ und $K_2 \in \mathfrak{K}_1'$.
Das heißt $\mathfrak{R}_{\mathfrak{K}_i'}(T) \neq \emptyset$, sodaß also bereits die $\mathfrak{K}_i$
$\mathfrak{B}^*$ überdeckt; damit sind dann die $\mathfrak{K}_i^*$ keine Kerne,
Widerspruch!

Satz 3: Es sei $\mathfrak{B}=\{T_{\mu_1},\ldots,T_{\mu_k}\}$. Dann werden $\mathfrak{B}_i \subset \mathfrak{B}$ wie folgt rekursiv definiert:

$\mathfrak{B}_1=\{T_{\mu_1}\}$

$\mathfrak{B}_i=\{T_{\mu_i}\} \cup \mathfrak{B}_{i-1}$, $i=2,\ldots,k-1$

$\mathfrak{B}_k=\{T_{\mu_k}\} \cup \mathfrak{B}_{k-1}=\mathfrak{B}$

Zudem sei für alle i $\hat{\mathfrak{K}}_i = \hat{\mathfrak{K}}(\mathfrak{B}_i,\mathfrak{T})$, sodaß also insbesondere $\hat{\mathfrak{K}}_k$ die Menge aller Kerne von $\mathfrak{B}$ ist.

Dann liefert das Verfahren (V) sukzessive alle $\hat{\mathfrak{K}}_i$ und mithin auch $\hat{\mathfrak{K}}_k$.

Der Beweis hierzu geht mit vollständiger Induktion unter Benutzung von Satz 2 und ist trivial.

Mit den Bezeichnungen von Satz 3 soll das Verfahren noch einmal übersichtlich formuliert werden:

Sei $\mathfrak{B}=\{T_{\mu_1},\ldots,T_{\mu_k}\}$, $\mathfrak{T}=\{\mathfrak{Q}_1,\ldots,\mathfrak{Q}_r\}$.

Mit $\mathfrak{B}_0=\emptyset$, $\mathfrak{B}_i=\mathfrak{B}_{i-1} \cup \{T_{\mu_i}\}$ und $\hat{\mathfrak{K}}_i = \hat{\mathfrak{K}}(\mathfrak{B}_i,\mathfrak{T})$ erhält man $\hat{\mathfrak{K}}(\mathfrak{B},\mathfrak{T})$

durch:

1-ter Schritt: $\hat{\mathfrak{K}}_1 = \left\{\{\mathfrak{Q}_\nu\} \mid \mathfrak{Q}_\nu \in \mathfrak{R}_{\mathfrak{T}}(T_{\mu_1})\right\}$

λ-ter Schritt: Für alle $\mathfrak{K} \in \hat{\mathfrak{K}}_{\lambda-1}$ wird untersucht:

a) $\mathfrak{R}_{\mathfrak{R}}(T_{\mu_\lambda}) \neq \emptyset$; dann ist sofort $\mathfrak{R} \in \hat{\mathfrak{K}}_\lambda$

b) $\mathfrak{R}_{\mathfrak{R}}(T_{\mu_\lambda}) = \emptyset$; sei $\mathfrak{R}_{\mathfrak{T}}(T_{\mu_\lambda}) = \{\mathfrak{L}_{\lambda_1}, \ldots, \mathfrak{L}_{\lambda_s}\}$.

In diesem Fall gilt $\mathfrak{R} \cup \{\mathfrak{L}_{\lambda_\nu}\} \in \hat{\mathfrak{K}}_\lambda$ genau dann, wenn kein $\mathfrak{R}' \in \hat{\mathfrak{K}}_{\lambda-1}$ existiert mit

$\alpha)$ $\mathfrak{R}' \subsetneq \mathfrak{R} \cup \{\mathfrak{L}_{\lambda_\nu}\}$

$\beta)$ $\mathfrak{R}_{\mathfrak{R}'}(T_{\mu_\lambda}) \neq \emptyset$

Mit diesem Verfahren kann also für beliebige $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}$ und $\bar{\mathfrak{T}} \subset \mathfrak{T}$ die Menge der Kerne, $\hat{\mathfrak{K}}(\mathfrak{B}, \bar{\mathfrak{T}})$, bestimmt werden. Es sei hier noch einmal betont, daß die tatsächlich interessanten Lösungen der Überdeckungsprobleme, die Minkerne, erst nachträglich durch Berechnung der Bewertungen aus der Menge der Kerne bestimmt werden müssen.

Für das Minimierungsproblem erhält man vier wesentliche Anwendungsmöglichkeiten:

⟨1⟩ Der Normalfall:
Aus der vorgegebenen Charakteristik C_o bzw. der Menge $\mathfrak{G}_o$ der zulässigen Terme bestimmt man die Basis $\mathfrak{B}$.
Mit $\mathfrak{B} := \mathfrak{G}_o$ und $\bar{\mathfrak{T}} := \mathfrak{B}$ erhält man mit (V) dann $\hat{\mathfrak{K}}(\mathfrak{G}_o, \mathfrak{B})$ und daraus $\hat{\mathfrak{K}}_o(\mathfrak{G}_o, \mathfrak{B})$.

⟨2⟩ Der "don't-care"-Fall:
Zu C_o und $\mathfrak{G}_o$ sei $\mathfrak{D}_o$ eine vorgegebene Menge von "don't-care"-Termen, wobei man o.B.d.A. $\mathfrak{G}_o \cap \mathfrak{D}_o = \emptyset$ voraussetzen darf.
Sei $\mathfrak{B}^*$ die zu $\mathfrak{G}_o \cup \mathfrak{D}_o$ bestimmte Basis.
Mit $\mathfrak{B} := \mathfrak{G}_o$ und $\bar{\mathfrak{T}} := \mathfrak{B}^*$ erhält man mit (V) $\hat{\mathfrak{K}}(\mathfrak{G}_o, \mathfrak{B}^*)$ und daraus $\hat{\mathfrak{K}}_o(\mathfrak{G}_o, \mathfrak{B}^*)$; nach Lemma 3 ist dies tatsächlich die Menge der bewertungsminimalen Überdeckungssysteme von $\mathfrak{G}_o$ im "don't-care"-Fall.

⟨3⟩ Der Vorgabefall:

a) Zu C_o und $\mathfrak{G}_o$ sei $\mathfrak{G}_o$ eine vorgegebene Menge von Familien (d.h. partiellen konjunktiven Formen), die auf jeden Fall Elemente der zu bestimmenden Minkerne sein sollen.
Man setzt $\mathfrak{G}_o^* = \mathfrak{G}_o - \bigcup_{\mathfrak{R} \in \mathfrak{G}} \mathfrak{R}$ und erhält die Basis $\mathfrak{B}^*$ zu $\mathfrak{G}_o^*$.

Mit (V) erhält man daraus $\hat{\mathfrak{K}}(\mathfrak{G}_o^*, \mathfrak{B}^*)$ und schließlich $\hat{\mathfrak{K}}_o(\mathfrak{G}_o^*, \mathfrak{B}^*)$, sodaß für den Vorgabefall die Menge der Minkerne gegeben ist durch $\{\mathfrak{R} \cup \mathfrak{G}_o \mid \mathfrak{R} \in \hat{\mathfrak{K}}_o(\mathfrak{G}_o^*, \mathfrak{B}^*)\}$.

b) Zu C_o und $\mathfrak{S}_o$ sei $\mathfrak{G}_o$ eine vorgegebene Menge von Familien (d.h. partiellen konjunktiven Formen), die auf keinen Fall Elemente der zu bestimmenden Minkerne sein sollen. Man setzt $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}-\mathfrak{G}_o$ und erhält mit $\hat{K}_o(\mathfrak{S}_o,\mathfrak{B})$ die Menge der Minkerne für diesen Vorgabefall.

c) Als Kombination von a) und b) erhält man bei gleichzeitig gegebenen $\mathfrak{S}_o$ und $\mathfrak{G}_o$ die Menge der Minkerne durch $\{\mathfrak{K}\cup\mathfrak{G}_o \mid \mathfrak{K}\in \hat{K}_o(\mathfrak{S}^*,\mathfrak{B}^*)\}$, wobei $\mathfrak{B}^* = \mathfrak{B}^*-\mathfrak{G}_o$ ist.

Die Verbindung von ⟨2⟩ und ⟨3⟩ ergibt

⟨4⟩ Der "don't-care"-Fall mit Vorgabe:
Seien wie oben bereits erläutert $\mathfrak{S}_o,\mathfrak{D}_o,\mathfrak{S}_o,\mathfrak{G}_o$ gegeben; zu $\mathfrak{S}_o\cup\mathfrak{D}_o$ sei $\mathfrak{B}^{**}$ die Basis, entsprechend $\mathfrak{B}^*$ für $\mathfrak{S}_o\cup\mathfrak{D}_o - \bigcup_{\mathfrak{Q}\in\mathfrak{S}_o}\mathfrak{Q}$. Weiter sei

$\mathfrak{S}_o^* = \mathfrak{S}_o - \bigcup_{\mathfrak{Q}\in\mathfrak{S}_o}\mathfrak{Q}$. In der zu ⟨3⟩ analogen Fallunterscheidung

erhält man dann die gesuchten Minkernmengen durch

a) $\{\mathfrak{K}\cup\mathfrak{S}_o \mid \mathfrak{K}\in \hat{K}_o(\mathfrak{S}_o^*,\mathfrak{B}^*)\}$

b) $\hat{K}_o(\mathfrak{S}_o,\mathfrak{B}^{**}-\mathfrak{G}_o)$

c) $\{\mathfrak{K}\cup\mathfrak{S} \mid \mathfrak{K}\in \hat{K}_o(\mathfrak{S}_o^*,\mathfrak{B}^{**}-\mathfrak{G}_o)\}$

Abschließend soll noch gezeigt werden, wie die Lösungen des Überdeckungsproblems, die Kerne, auf die eigentlich interessierenden korrespondierenden disjunktiven Partialformen zurückgeführt werden können.
Sei also $\mathfrak{K}=\{\mathfrak{Q}_1,\ldots,\mathfrak{Q}_r\}$ ein solcher lösender Kern. Dann werden i.a. die Familien noch in codierter Form vorliegen; es ist daher als erstes notwendig, diese Codierung rückgängig zu machen:

Für $\mathfrak{Q}_i$ seien D(i) und INDEX(i) bekannt ; dann erhält man gemäß III, Def. 2 durch die Aufspaltung von D(i) in Zweierpotenzen mit den dabei auftretenden Exponenten die ν mit $\nu\in V(\mathfrak{Q}_i)$. INDEX(i) gibt den niedrigsten Term-Index der in $\mathfrak{Q}_i$ enthaltenen Terme an.

Im folgenden Beispiel ist, für n=4, D(i)=13 und INDEX(i)=2 gegeben.
Man erhält für $\mathfrak{Q}_i$:

$$D(i) = 13 = 8 + 4 + 1 = 2^3 + 2^2 + 2^0 \Longrightarrow V(\mathfrak{Q}_i) = \{3,2,0\}$$

$$INDEX(i) = 2 \Longrightarrow$$ Der Term mit dem niedrigsten Index in $\mathfrak{Q}_i$ ist T_2; wegen n=4 ist $T_2=(0,0,1,0)$

In $\mathfrak{Q}_i$ liegen nun mit T_2 sämtliche Terme (s.S.30), die in allen ν-ten Komponenten mit $\nu\in V(\mathfrak{Q}_i)$ beliebige Werte aus $\{0,1\}$ annehmen, und die für alle $\mu\notin V(\mathfrak{Q}_i)$ - hier also für $\mu=1$ - gerade die Werte annehmen, die an diesen Stellen durch T_2 vorgegeben sind.

Man erhält so der Reihe nach die acht zu $\mathfrak{Q}_i$ gehörenden Terme:

$$\begin{aligned} T_2 &= (0,0,1,0)\\ T_3 &= (0,0,1,1)\\ T_6 &= (0,1,1,0)\\ T_7 &= (0,1,1,1)\\ T_{10} &= (1,0,1,0)\\ T_{11} &= (1,0,1,1)\\ T_{14} &= (1,1,1,0)\\ T_{15} &= (1,1,1,1) \end{aligned}$$

Es sind nun also alle $\mathfrak{Q}_i$ mit ihren Verwandtschaften $V(\mathfrak{Q}_i)$ in unverschlüsselter Form gegeben. Nach I, Def. 19 erhält man zu $\mathfrak{K}$ eindeutig die disjunktive Partialform $N_{P*}(x)=\bigvee_{i=1}^{r} F_{J_i}(x)$, wobei die $\mathfrak{Q}_i$ gerade die zugehörigen Familien der partiellen konjunktiven Formen F_{J_i} sind. (Vergl. auch I, Lemma 2 und Satz 5.)
Zur expliziten Darstellung von N_{P*} bleibt also noch zu überlegen, wie von der Kenntnis von $\mathfrak{Q}_i$ und $V(\mathfrak{Q}_i)$ auf die explizite Darstellung von F_{J_i} geschlossen werden kann:

Aus II,(11) und Def. 6 erhält man $J_i=\{n-1,\ldots,0\}-V(\mathfrak{Q}_i)$.
Daraus folgt nach I, Def. 9 : $F_{J_i}(x) = \bigwedge_{j\in\{n-1,\ldots,0\}-V(\mathfrak{Q}_i)} A_j(x_j)$,

wobei die A_j aus $\mathfrak{A}$ sind und gemäß I, Def. 4 über eine eventuelle Negation von x_j Auskunft geben. Es sind also noch die A_j zu bestimmen. Nach I, Def. 10 und (8) ist $F_{J_i}(T)=1$ genau für alle $T\in\mathfrak{Q}_i$. Sei also etwa $\mathfrak{Q}_i=\{T_{i_0},\ldots,T_{i_{2^s-1}}\}$ mit $i_0<\ldots<i_{2^s-1}$; dann gilt insbesondere auch für $T_{i_0}=(t_{i_0,n-1},\ldots,t_{i_0,0})$: $F_{J_i}(T_{i_0})=1$.

(Das weitere kann o.B.d.A. für T_{i_0} durchgeführt werden, da für $j \in \{n-1,\ldots,0\}-V(\mathfrak{B}_i)$ nach II, (11) und Def. 6 die j-ten Komponenten der Terme $\mathfrak{B}_i$ jeweils übereinstimmen.)

Nach I, Def. 1 ist $F_{J_i}(T_{i_0}) = \bigwedge_{j \in \{n-1,\ldots,0\}-V(\mathfrak{B}_i)} A_j(t_{i_0,j}) = 1$ genau dann, wenn für alle diese j gilt: $A_j(t_{i_0,j})=1$. Daher muß nach I, Def. 4 gelten:

$$A_j(x_j) = \begin{cases} \bar{x}_j & \text{für} \quad t_{i_0,j}=0 \\ x_j & \text{für} \quad t_{i_0,j}=1 \end{cases}$$

Damit ist schließlich $F_{J_i}(x)$ explizit bestimmt für alle i; also kann auch $N_{P^*}(x)$ explizit angegeben werden.

Der Vollständigkeit halber soll noch die Lösung des auf den Seiten 61 ff. behandelten Beispiels angegeben werden. Man erhält die disjunktive Minimalform DMF wie folgt als Disjunktionen der partiellen konjunktiven Formen PKF (vergl. S. 65, Tab. 9):

$$DMF_1 = \bigvee(PKF_0, PKF_1, PKF_3, PKF_4, PKF_6, PKF_7)$$
$$DMF_2 = \bigvee(PKF_0, PKF_1, PKF_4, PKF_5, PKF_6, PKF_7)$$
$$DMF_3 = \bigvee(PKF_0, PKF_2, PKF_3, PKF_5, PKF_6, PKF_7)$$
$$DMF_4 = \bigvee(PKF_0, PKF_2, PKF_4, PKF_5, PKF_6, PKF_7)$$

V) Erläuterungen, Ergänzungen, Ausblicke

Es sollen hier zu den bisher behandelten Teilen Stellung genommen werden und Kommentare gegeben werden. Gleichzeitig soll versucht werden, weiterführende Ideen und Ansätze zu skizzieren; dabei treten unter anderem auch Ergänzungen auf, die in der Arbeit selbst keinen Platz fanden.

Aus solchen Ansätzen, die sich insbesondere aus der Frage nach der algorithmischen Lösbarkeit von Überdeckungsproblemen ergeben, resultiert dann - sozusagen als Anhang - der Teil VI.

A) Zu Teil I :

Es ist üblich, (Ausnahme siehe etwa [7]), als mathematische Disziplin für die Beschreibung von Schaltwerken die Boole'sche Algebra heranzuziehen. Dies hat seinen Ursprung darin, daß sich die charakteristischen Merkmale von Serien-Parallel-Schaltwerken einerseits und von Boole'schen $\wedge$ - $\vee$ - Funktionen andererseits eineindeutig entsprechen. Eben diese charakteristischen Merkmale, siehe I, Def. 1 und Def. 3, reichen aber in abbildungstheoretischer Handhabung bereits völlig aus, alle für das Minimierungsproblem notwendigen Beschreibungen vorzunehmen, siehe I, Def. 9 und Def. 11. Es konnte also darauf verzichtet werden, die Boole'sche Algebra in vollem Umfang auszubreiten.

Insbesondere gestattet die hier gewählte Form der Darstellung das zu behandelnde Problem in prägnanter Weise zu formulieren, siehe I, (13) und (16). Als Nebenprodukt ergeben sich dabei mit I, Satz 3 Satz 4 und (11) Klassifizierungseigenschaften Boole'scher Funktionen - etwa, daß jeder Boole'schen Funktion eindeutig eine Klasse von disjunktiven Partialformen und genau eine disjunktive Normalform zugeordnet ist.

Ein weiterer wesentlicher Gesichtspunkt scheint die Anwendung der Kategorietheorie auf das Minimierungsproblem zu sein. Dieser Ansatz führt sofort auf einige recht eindrucksvolle Beschreibungsmöglichkeiten, ohne daß zunächst viel mehr als die Sprache der Kategorietheorie zum Einsatz kommt:
Gemäß I, Def. 9 ist eine partielle konjunktive Form gegeben durch $F_j(x) = \bigwedge_{k \in J_j} A_k^j(x_k)$ mit $|J_j| = s_j$ und $A_k^j \in \mathfrak{A}$;
hierbei ist die Schreibweise im Hinblick auf das folgende bereits leicht modifiziert worden.

Mit den Abbildungen $(A^j_{k_1} \times \ldots \times A^j_{k_{s_j}}) \in \mathfrak{A}^{s_j}$ und $\bigwedge^{s_j}$ erhält man

daraus: $F_j = \bigwedge^{s_j} \circ \bigtimes_{k \in J_j} A^j_k$.

Entsprechend ergibt sich für die disjunktiven Partialformen:

$N_P = \bigvee^{m} \circ \bigtimes_{j \in \Theta_P} \left(\bigwedge^{s_j} \circ \bigtimes_{k \in J_j} A^j_k \right)$, wobei $m = |P|$ und $P = \{F_j | j \in \Theta_P\}$ ist.

Der Vorteil, die Abbildungen auf diese Weise einzuführen, liegt darin, daß diese Definitionen elementfrei sind. Das scheint sowohl im Bezug auf die praktische Anwendung als auch in Bezug auf die theoretische Behandlung von einiger Bedeutung zu sein.

(Herr M. Pfender und der Verfasser behalten sich eingehende Untersuchungen darüber vor.)

Es soll noch angedeutet werden, welche weiteren Konsequenzen sich unmittelbar ergeben.

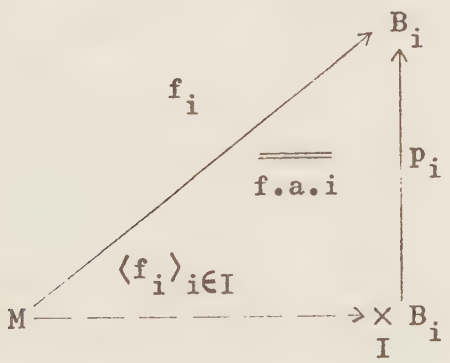
Dazu zunächst zwei Abbildungssätze aus der Kategorie der Mengen:

Es seien M und B_i , $i \in I$, Mengen und $f_i : M \longrightarrow B_i$

Abbildungen; $p_i : \bigtimes_{i \in I} B_i \longrightarrow B_i$ seien die i-ten Projektionen.

Dann gilt: Es existiert eindeutig eine, durch $\langle f_i \rangle_{i \in I}$ bezeichnete, Abbildung von M nach $\bigtimes_{i \in I} B_i$, so daß gilt:

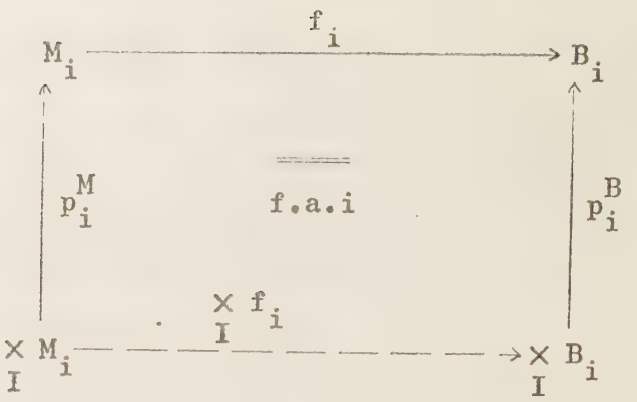
(1)



Ganz entsprechend erhält man die folgenden kommutativen Diagramme, in denen $\bigtimes_{i \in I} f_i$ die eindeutig bestimmte kommutative Ergänzung ist.

Die Gültigkeit folgt aus (1), wobei $\bigtimes_{i \in I} f_i := \langle f_i \circ p_i^M \rangle_{i \in I}$ gesetzt wird:

(2)



Es war nun $\mathfrak{L}_j$ als zugehörige Familie von F_j definiert durch:

$$F_j(T) = 1 \Longleftrightarrow \Big(\bigwedge_{k\in J_j} t_k=1 \Longleftrightarrow A_k^j=I \Big) \Longleftrightarrow T\in\mathfrak{L}_j$$

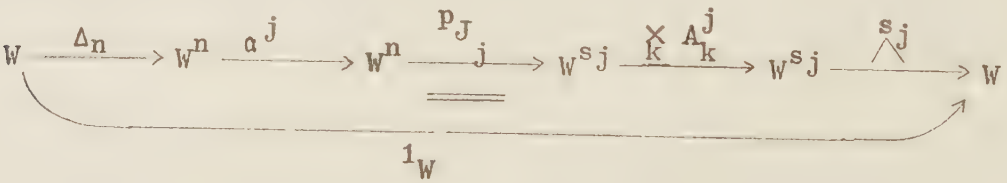
D.h. in $\mathfrak{L}_j$ liegen genau alle diejenigen Terme, die in den k-ten Komponenten mit $k\in J_j$ dem durch $\underset{k\in J_j}{\times} A_k^j$ gegebenen Muster entsprechen und sonst frei sind. Dieses "Aussortieren" nach relevanten Komponenten läßt sich in eindeutiger Weise durch die Projektionen

$$W^n \xrightarrow{\;p_{J_j}\;} W^{s_j} \qquad \text{beschreiben.}$$

$$(t_0,\ldots,t_{n-1}) \longmapsto (t_{k_1},\ldots,t_{k_{s_j}})$$

In der Bezeichnungsweise $\mathfrak{a}^j = \overset{n}{\times} A_i^j \in \mathfrak{U}^n$ gilt dann:

(3) Der Familie $\mathfrak{L}_j$ ist eindeutig die Menge $a_j \subset \mathfrak{U}^n$ derjenigen $\mathfrak{a}^j$ zugeordnet, die das folgende Diagramm kommutativ machen:



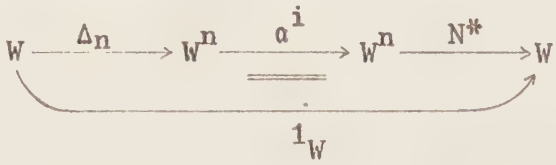
Dabei bezeichnet Δ_n die jeweilige Diagonalabbildung:

$\Delta(w) = (w,\ldots,w) \in W^n$ für $w\in W$.

Aus der eineindeutigen Zuordnung von konjunktiven Formen und zugehörigen Termen gemäß I, Satz 1 folgt, wie oben dargelegt, eine eineindeutige Zuordnung Term $\longleftrightarrow$ A_k-Muster, sodaß also die Menge $\mathfrak{L}_o$ der zulässigen Terme insbesondere einer Teilmenge $a_o \subset \mathfrak{U}^n$ eineindeutig zugeordnet ist.

Damit sind die disjunktiven Partialformen $N^* \in [N_o]$, also die Abbildungen, unter denen die Lösungen des Minimierungsproblems zu suchen sind, dadurch charakterisiert, daß sie das folgende Diagramm kommutativ machen:

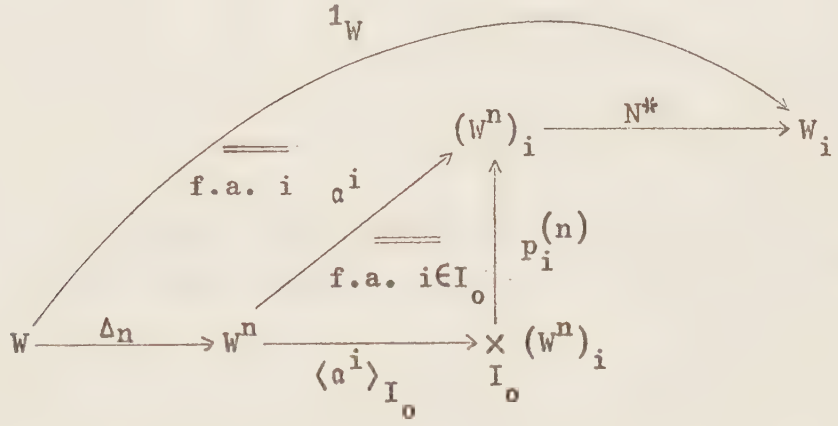
(4)



, und zwar für alle $a^i \in a_o$

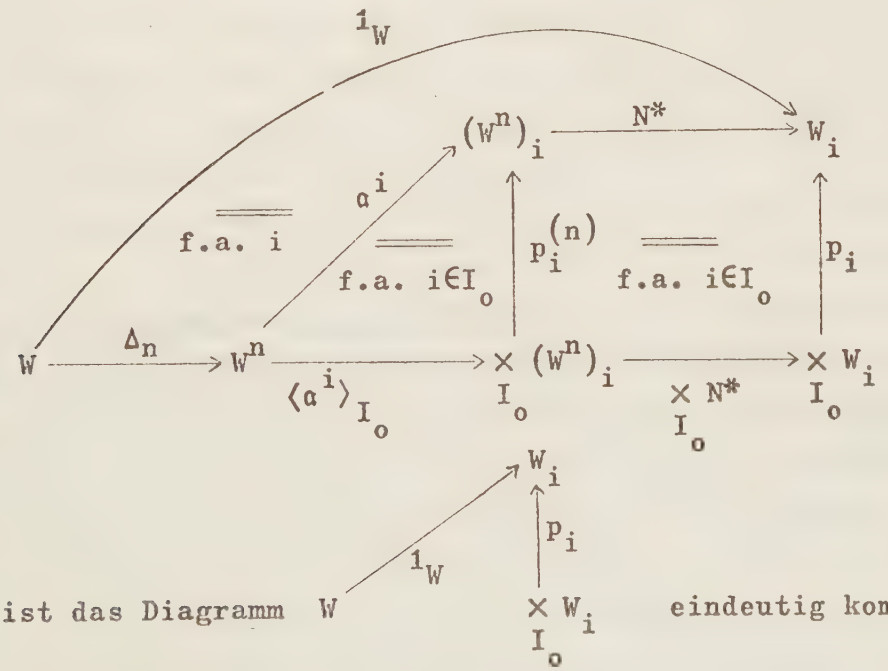
Mit (1) folgt daraus, wenn $a_o = \{a^i \mid i \in I_o\}$, $W_i = W$ und $(W^n)_i = W^n$ gesetzt wird:

(5)



Dieses Diagramm läßt sich weiter nach (2) kommutativ ergänzen, wobei in $\underset{i \in I_o}{\times} N^*$ stets das selbe, einmal fest gewählte N^* gemeint ist:

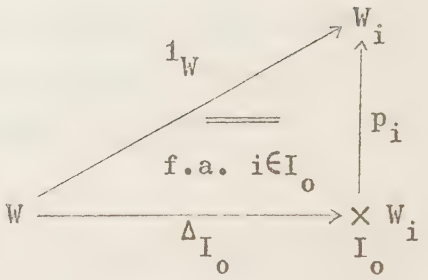
(6)



Nach (1) ist das Diagramm

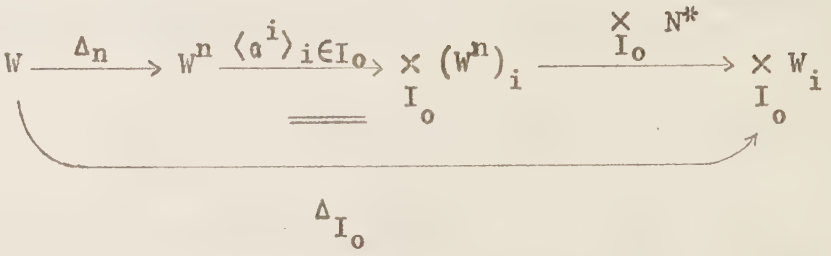
eindeutig kommutativ ergänzbar; diese Ergänzung ist offenbar durch Δ_{I_o} gegeben, sodaß gilt:

(7)



Wegen der Eindeutigkeit der Ergänzung folgt dann aber aus (6) sofort:

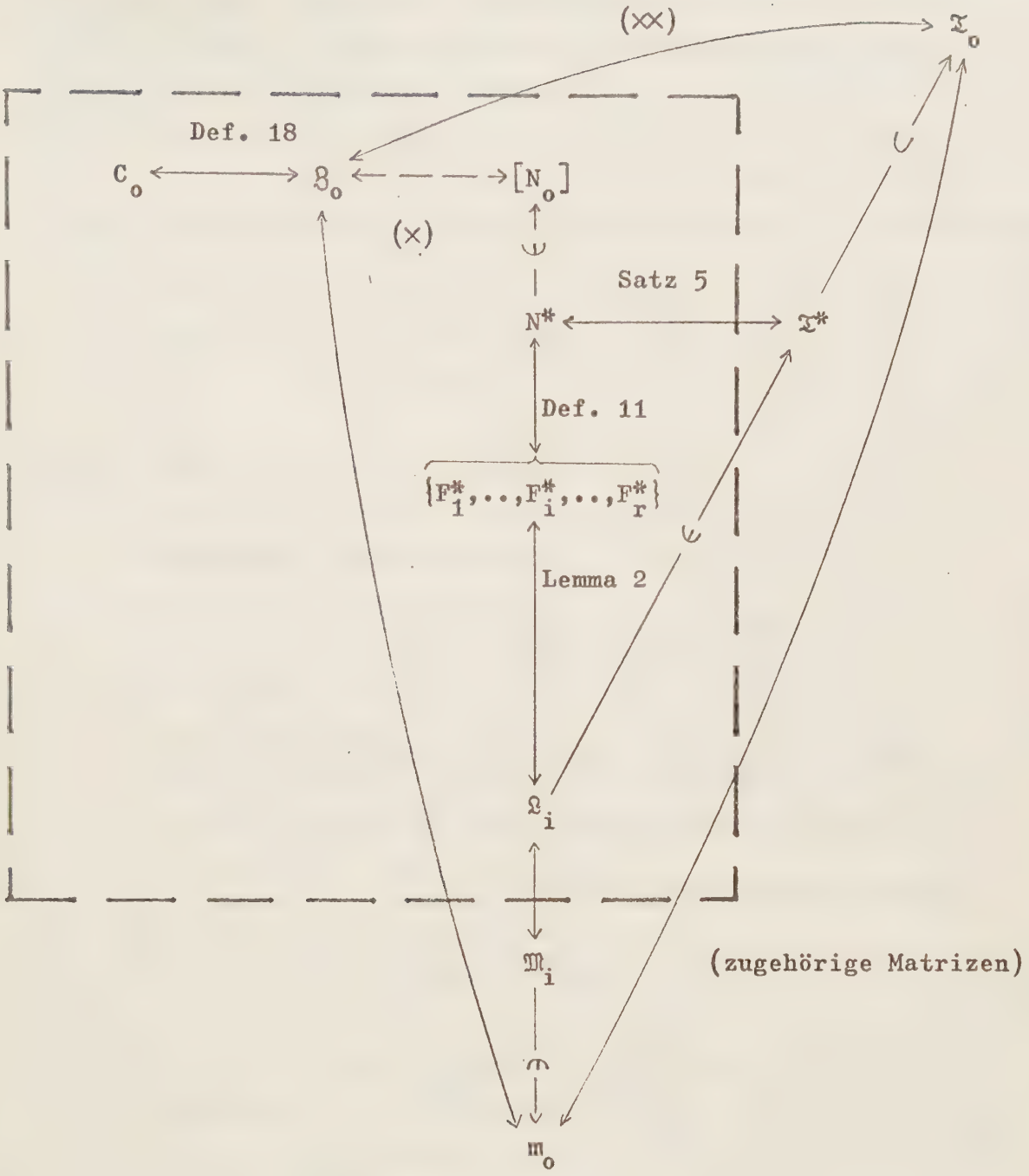
(8) Das Diagramm



ist also genau dann kommutativ, wenn $N^* \in [N_o]$ ist, womit die $N^* \in [N_o]$ eindeutig charakterisiert sind.

B) Zu Teil II:

Zum besseren Verständnis sei hier zunächst ein Diagramm angegeben, aus dessen Aufbau sich der Verlauf der Untersuchungen vielleicht besser erkennen läßt. Dabei stehen an den Pfeilen, soweit sie nicht triviale Zusammenhänge beschreiben oder unten noch erläutert werden, die Bezugnahmen auf die entsprechenden Punkte in der Arbeit. (×) gibt dabei den Zusammenhang an, der in I als Kernpunkt der Untersuchungen erkannt wurde, und der auf die Untersuchung von (××) führte. Der gestrichelte umgrenzte Bereich wurde in A) in kategorieller Schreibweise erfaßt; eine entsprechende Erfassung des Restes des Diagramms ließe sich, ohne die benutzten Begriffe wesentlich zu modifizieren, auf der geschaffenen Basis elementar durchführen.



In Teil I wurde das zu behandelnde Problem von (×) auf (××) übertragen, also auf die Bestimmung von $\mathfrak{T}_o$. Dies schließlich wurde in Teil II durchgeführt, indem die den Familien zugehörigen Matrizen untersucht wurden. Da also die effektive Untersuchungsarbeit in Teil II geleistet wurde, ist dieser Teil naturgemäß auch der aufwendigste.

Die Darstellung von Matrix-Operationen und Relationen in [5] gibt nun eine Anregung, diese Untersuchungen zu formalisieren: Nach II, (19) sind den Familien Boole'sche Matrizen $\mathfrak{M}$ zugeordnet; der Menge $\mathfrak{T}_o$ aller Familien über $\mathfrak{S}_o$ entspricht dann die Menge $\mathfrak{m}_o$ aller zugehörigen Boole'schen Matrizen.

Mit $\sim$ werde die die Spaltenvertauschung beschreibende Äquivalenzrelation auf der Menge m der Boole'schen Matrizen bezeichnet; dann ist jedem $\mathfrak{L}_i \in \mathfrak{T}_o$ eineindeutig $[M_i] \in m/\sim$ zugeordnet. Aus II, (19) erhält man dazu in Verbindung mit (12) als eindeutig bestimmten normalen Repräsentanten dieser Klasse die zugehörige Boole'sche Matrix $\mathfrak{M}_i$.

Dies führt auf die beiden folgenden äquivalenten Problemstellungen:

⟨1⟩ Für irgend zwei $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2 \in \mathfrak{T}_o$ ist i.a. sicher $\mathfrak{L}_1 \cup \mathfrak{L}_2$ nicht aus $\mathfrak{T}_o$. Es ist daher eine Relation $R \subset \mathfrak{T}_o \times \mathfrak{T}_o$ anzugeben, sodaß gilt: $\mathfrak{L}_1 \cup \mathfrak{L}_2 \in \mathfrak{T}_o \Longleftrightarrow (\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2) \in R$

⟨2⟩ Mit $\mathfrak{L}_1 \longleftrightarrow [\mathfrak{M}_1] \longleftrightarrow \mathfrak{M}_1$

und $\mathfrak{L}_2 \longleftrightarrow [\mathfrak{M}_2] \longleftrightarrow \mathfrak{M}_2$

ist eine Relation $r \subset m_o \times m_o$ anzugeben, sodaß gilt:

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{M}_1 \\ \mathfrak{M}_2 \end{pmatrix}^* \in m_o \Longleftrightarrow (\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2) \in r$$

Dabei meint $\begin{pmatrix} \mathfrak{M}_1 \\ \mathfrak{M}_2 \end{pmatrix}$ die durch Untereinanderschreiben aus $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ entstandene Matrix, und es ist $\begin{pmatrix} \mathfrak{M}_1 \\ \mathfrak{M}_2 \end{pmatrix}^*$ der normale Repräsentant aus $\left[\begin{pmatrix} \mathfrak{M}_1 \\ \mathfrak{M}_2 \end{pmatrix}\right]$.

In diesem Sinne erhält man folgende Darstellung des Inhalts von Teil II:

(1) Grundlage sind k-vollständige Matrizen gemäß II, (1), also Matrizen, deren Zeilen Z_i gerade alle 2^k k-stelligen Dualzahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge sind:

$$\begin{pmatrix} Z_0 \\ \vdots \\ Z_{2^k-1} \end{pmatrix} \text{ mit } Z_i \text{ k-stellig und } d(Z_i) = i$$

(2) Das Äquivalent zu einer Familie $\mathfrak{L}$ mit $V(\mathfrak{L}) = \{\nu_1, \ldots, \nu_k\}$ ist eine normale Matrix $\mathfrak{M}$, die aus einer k-vollständigen Untermatrix $\mathfrak{M}^{**}$ und einer Untermatrix $\mathfrak{M}^*$ mit konstanten Spalten besteht (vergl. II, (17), (18), (19)):

$$\left(\begin{array}{c|c} & \nu_1, \ldots, \nu_k \\ \hline \mathfrak{M}^* & \mathfrak{M}^{**} \end{array}\right).$$

(3) Zwei k-vollständige Matrizen $\mathfrak{M}^{**}$ kann man gemäß II, Def. 1 genau auf die folgende Weise zu einer (k+1)-vollständigen Matrix zusammenfassen und ergänzen:

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \vdots & \mathfrak{M}^{**} \\ 0 & \\ \hline 1 & \\ \vdots & \mathfrak{M}^{**} \\ 1 & \end{array}\right)$$

(4) Die Frage ist nun: Genau wann und wie lassen sich zwei normale Matrizen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ zu einer umfassenden normalen Matrix vereinigen oder zusammenfügen.

1) $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ müssen vollständige Untermatrizen des gleichen Typs enthalten; und dies muß - folgend aus Bedingungen für Matrix-Operationen, die aus $\sim$ - Äquivalenzklassen nicht hinausführen - verträglich mit den jeweiligen Indexmengen sein: $V(\mathfrak{L}_1)=V(\mathfrak{L}_2)=V$. Entsprechend müssen die jeweiligen konstanten Spalten gleiche Indizes tragen.

Mit $\mathfrak{M}^{**} = \mathfrak{M}_1^{**} = \mathfrak{M}_2^{**}$ erhält man so als Zusammenfassung zunächst:

$$\mathfrak{M}_\cup = \left(\begin{array}{c|c} \mathfrak{M}_1^{*} & \mathfrak{M}^{**} \\ \hline \mathfrak{M}_2^{*} & \mathfrak{M}^{**} \end{array}\right)$$

2) Um nun aus $\binom{\mathfrak{M}^{**}}{\mathfrak{M}^{**}}$ gemäß (3) eine (k+1)-vollständige Matrix machen zu können, braucht man o.B.d.A. aus $\mathfrak{M}_1^{*}$ eine 0-Spalte und aus $\mathfrak{M}_2^{*}$ eine 1-Spalte; d.h.: in den Mengen der konstanten Spalten von $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ muß ein Paar Spalten verschiedenen Typs auftreten.

Man erhält so:

$$\mathfrak{M}_\cup = \left(\begin{array}{c|c|c} & 0 & \\ & \vdots & \mathfrak{M}^{**} \\ & 0 & \\ \hline & 1 & \\ & \vdots & \mathfrak{M}^{**} \\ & 1 & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline & \end{array}\right) \mathfrak{M}_\cup^{**}$$

Dabei ist dann $\mathfrak{M}_U^{**}$ (k+1)-vollständig.

3) Die restlichen konstanten Spalten von $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ müssen indexweise gleich sein, damit (2) in $\mathfrak{M}_U$ erfüllt wird.

4) Aus 2) und 3) folgt: Für die jeweils 0-ten Zeilen $Z_{i,0}$ der $\mathfrak{M}_i$ muß gelten, daß sie in genau einer ν-ten Stelle mit $\nu \notin V$ verschieden sind.

Daraus ergibt sich insgesamt:
$\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ lassen sich genau dann zu einer normalen Matrix $\mathfrak{M}_U$ zusammenfassen, wenn gilt:

$$a)\quad V(\mathfrak{Q}_1) = V(\mathfrak{Q}_2) = V$$

$$b)\quad V(\{T_{1,0}, T_{2,0}\}) = \{\nu\} \quad , \quad \nu \notin V$$

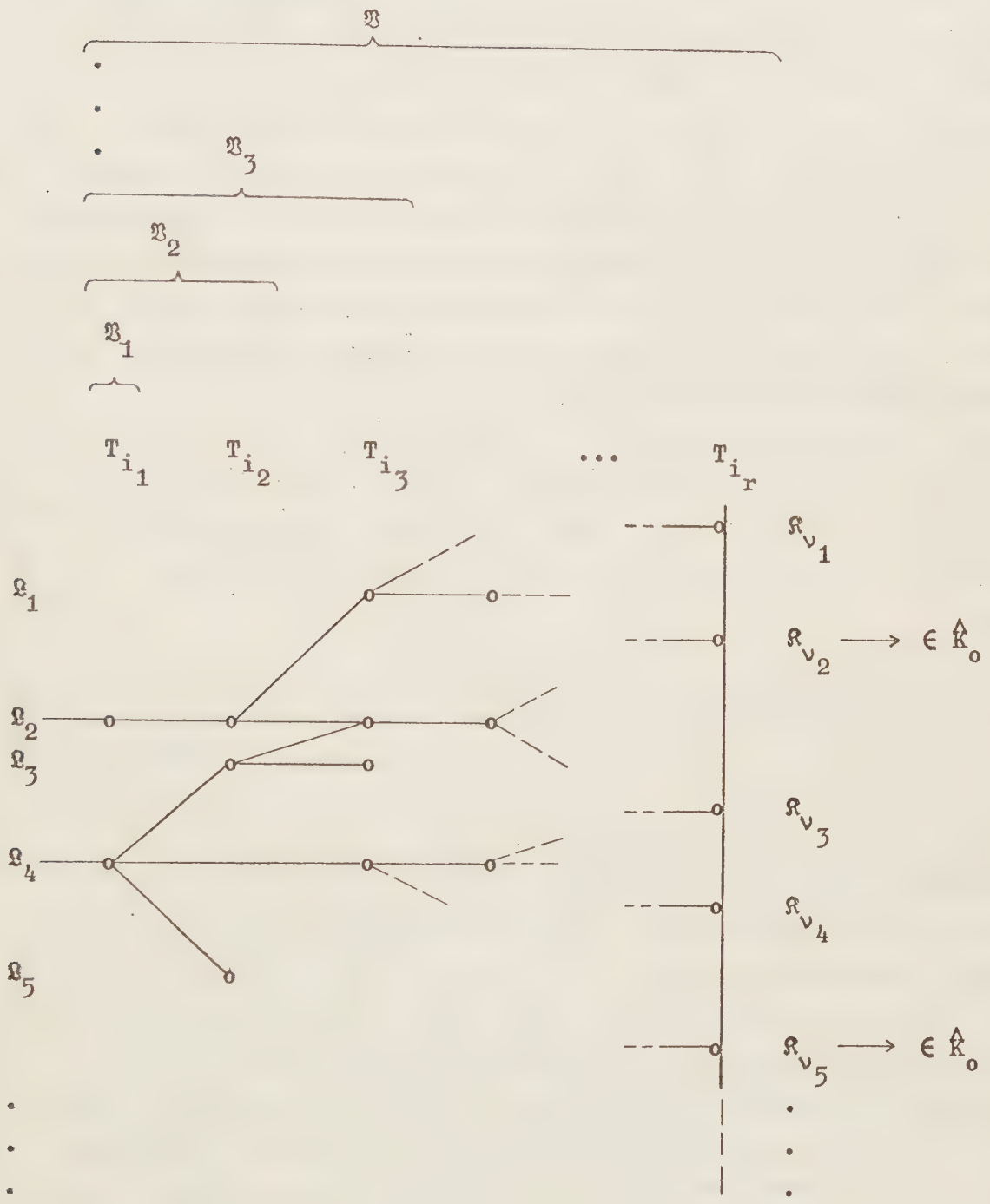
Dabei sind die T_i die mit den Z_i korrespondierenden Terme
(Für die Matrizen ist Zusammenfassen im Sinne von Hintereinanderschreiben gemeint. Damit entfällt hier die in II, Satz 10 getroffene Einschränkung.)
Da $\mathfrak{M}_U$ nach Konstruktion normal ist, ist $\mathfrak{Q}_1 \cup \mathfrak{Q}_2$ Familie.

Dieser Weg ist formal natürlich sehr viel übersichtlicher als der, der in Teil II gegangen wurde. Das liegt daran, daß alle vorbereitenden Untersuchungen über Matrizen, die dort in den Ablauf einbezogen wurden, hier vorausgestellt werden und daher die wesentlichen Strukturen stärker hervortreten lassen.

Der hier skizzierte formale Aspekt erlaubt zudem die Hoffnung, daß im Zusammenhang mit A) eine umfassende kategorielle Darstellung des Minimierungsproblems und der Lösungsverfahren möglich sein wird.

C) Zu Teil IV:

Eine Analyse des in IV gegebenen Überdeckungsverfahren ergibt die folgende, als Graph zu interpretierende schematische Darstellung des Ablaufes:



Dies ist entsprechend dem auf Seite 74 angegebenen Verfahren wie folgt zu verstehen: Jeder durchgehende Weg des Graphen entspricht einem Kern von $\mathfrak{V}$; an jedem i_k-ten Knoten wird entschieden, für jeden bis zur i_k-ten "Knotenebene" reichenden Weg, wie dieser zur Erfassung des Terms $T_{i_{k+1}}$ fortgeführt und eventuell verzweigt werden kann.

Dabei kommt es auch zu abbrechenden Wegen, die also das "Ziel", d.h. die $\mathfrak{T}$-Ebene, nicht erreichen. Unter den schließlich so erhaltenen $\mathfrak{K}_{\nu_j}$ sind noch die Kerne mit minimaler Bewertung auszusuchen.

Diese Darstellung des Überdeckungsproblems durch Graphen ist bekannt, und zur Lösung stellt sich hier die Frage, welche der Wege schließlich das Ziel $\hat{\mathfrak{K}}_o$ haben werden.

Gleichzeitig damit stellt sich in dieser Graphen-Darstellung ganz unmittelbar die Frage nach der Optimalität von Algorithmen, hier insbesondere nach der Optmalität solcher Wege- beschreibenden Algorithmen. Da sämtliche Minkerne Teilmengen von $\bar{\mathfrak{T}}$ sind, besteht trivialerweise der am wenigsten ökonomische Algorithmus darin, sämtliche Teilmengen von $\bar{\mathfrak{T}}$ aufzuschreiben und diese dann auf die Minkern-Eigenschaft durchzuprüfen.

Das andere Extrem wäre derjenige Algorithmus, der - in der Sicht des Graphen - an jedem Knoten effektiv nur dann verzweigt, wenn damit ein weiterer auf einen Minkern führender Weg eingeleitet würde - also ohne Kenntnis der Situationen an noch folgenden Knoten.

Das in IV angegebene Verfahren liegt bezüglich seiner Ökonomie zwischen den beiden Extrema. Es ist also jedenfalls nicht optimal im oben besprochenen Sinne. Zur gleichen Grundzeption - die wegen der sukzessiven Überdeckung der Terme besonders naheliegend ist und deshalb in vielen Überdeckungsverfahren wiederzufinden ist - wird in [8] ein sehr interessantes Verfahren angegeben; es werden dabei von Stufe zu Stufe die durch Verzweigungen entstehenden Teilgraphen gewissermaßen kombiniert, so daß mit jedem Schritt eine echte Reduktion des Graphen und damit ein reduziertes Überdeckungsproblem zu betrachten ist. Es entfällt so zunächst die explizite Verfolgung sämtlicher Verzweigungen. Jedoch ist es notwendig, nach Erreichen der letzten, dann trivialen Reduktionsstufe zur Bestimmung der Minimalüberdeckungen die ganze Entwicklung rückwärts zu vollziehen. Das bedeutet u.a., daß für jede Stufe die jeweiligen reduzierten Graphen gespeichert werden müssen.

Wesentlich ist also, daß man auch in diesem Verfahren, obgleich es zweifellos von seiner theoretischen Struktur sehr elegant ist, nicht darum herumkommt, erst den ganzen Graphen - oder die Gesamtstruktur des Problems - vollständig zu kennen, bevor man Lösungen konstruieren kann.

Es stellt sich die Frage, ob überhaupt ein Algorithmus denkbar und angebbar ist, der im obigen Sinne optimal arbeitet. Dazu wird zunächst eine Reduzierung des Problems angegeben. Die einzelnen Ergebnisse werden dafür nicht exakt nachgewiesen, sind aber leicht einzusehen.

Im übrigen vergleiche dazu auch die Ergebnisse aus [5].

Als erstes sei o.B.d.A. angenommen, daß gilt:

(1) $\quad |\mathfrak{R}_{\mathfrak{B}}(T)| > 1 \quad$ für alle $T \in \mathfrak{B}_0$

Da jedes T mit $|\mathfrak{R}_{\mathfrak{B}}(T)| = 1$ sofort eindeutig jedem Kern, also auch jedem Minkern angehören muß, sind solche T ohnehin problemlos, und es ist vernünftig, von vornherein nur Basen zu betrachten, die im Sinne von (1) reduziert sind.

Die weitere wesentliche Reduktion muß etwas vorbereitet werden:

Es sei $\bar{\mathfrak{T}}$ ein Familiensystem, und $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ seien Familien aus $\bar{\mathfrak{T}}$. Dann soll $\{S_1,\ldots,S_k\} \subset \bar{\mathfrak{T}}$ Schnittkette von $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ heißen, wenn gilt:

$$\begin{aligned} S_1 \cap \mathfrak{A}_1 &\neq \emptyset \\ S_j \cap S_{j+1} &\neq \emptyset \qquad \text{für } j=1,\ldots,k-1 \\ S_k \cap \mathfrak{A}_2 &\neq \emptyset \end{aligned}$$

$\bar{\mathfrak{T}}$ soll abgeschlossen heißen, wenn es zu je zwei Elementen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ sämtliche Schnittketten enthält.

Damit lassen sich sofort einige Eigenschaften angeben:

(2) Jedes Familiensystem läßt sich disjunkt in abgeschlossene Teilsysteme zerlegen. Dies gilt auch insbesondere für $\mathfrak{T}_0$ bzw. $\mathfrak{B}$.

(3) Sei daher $\mathfrak{B}^{(1)},\ldots,\mathfrak{B}^{(k)}$ die disjunkte Zerlegung von $\mathfrak{B}$ in abgeschlossene Teilsysteme. Dann läßt sich offenbar auch $\mathfrak{B}_0$ disjunkt in $\mathfrak{B}^{(1)},\ldots,\mathfrak{B}^{(k)}$ so zerlegen, daß gerade gilt:

$$\bigcup_{B \in \mathfrak{B}^{(i)}} B = \mathfrak{B}^{(i)} \qquad \text{für } i=1,\ldots,k.$$

Dies überträgt sich ebenfalls auf jeden Minkern $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{B}$ von $\mathfrak{B}_0$: Es existiert eine disjunkte Zerlegung $\mathfrak{K}^{(1)},\ldots,\mathfrak{K}^{(k)}$ von $\mathfrak{K}$, so daß $\mathfrak{K}^{(i)}$ gerade Minkern von $\mathfrak{B}^{(i)}$ ist mit $\mathfrak{K}^{(i)} \subset \mathfrak{B}^{(i)}$, für $i=1,\ldots,k$.

Nach (1) und (3) kann man die Untersuchung von Überdeckungsproblemen auf reduzierte, abgeschlossene Familiensysteme beschränken. In einem solchen System sind dann offenbar bezüglich einer Überdeckung keine Elemente mehr unmittelbar ausgezeichnet (vergleiche [5] S. 47 - "zyklische" Probleme - und [1] S.140).

Damit gilt:

(4) Die Definitionen von Minkernen und Kernen - IV, Def. 1, Def. 2 - sind rekursiv, ohne daß ein Element der Basis $\mathfrak{B}$ speziell ausgezeichnet ist.

Auf diesen Punkt wird in Teil VI noch eingegangen. Es wird aber hier die Schwierigkeit schon intuitiv klar, zu einer solchen reduzierten, abgeschlossenen Basis ein Auswahlverfahren anzugeben, das den oben genannten Optimalitätsforderungen entspricht, das also von vornherein sämtliche durchgehenden Wege determiniert bereithält.

Ist nämlich $\mathfrak{B} = \{B_1,\ldots,B_r\}$, und ist f ein solcher Auswahloperator, dann muß f auf B_1 angewendet bereits aussagen, ob B_1 zu irgendeinem Minkern gehört. Da jedoch B_1 sicher nicht unmittelbar als Minkern-Element erkennbar ist, wie oben erläutert wurde, muß diese von f über B_1 geforderte Aussage von der Konstellation aller B_j untereinander abhängig sein: Wäre nämlich diese Aussage im Gegenteil von einem B_i unabhängig, so könnte man zu der Basis $\mathfrak{B}$ eine nur bezüglich B_i veränderte Basis $\mathfrak{B}^*$ so angeben, daß die bezüglich B_1 getroffene Aussage in $\mathfrak{B}^*$ falsch ist. Das wird das folgende Beispiel zeigen:

Dabei sei der Einfachheit halber E(B) durch die Anzahl der Elemente von B gegeben; $E(\mathfrak{R})$ ist seinerseits die Summe der E(B) für $B \in \mathfrak{R}$.

$\mathfrak{B}$ wird durch die folgende Tabelle gegeben:

$\mathfrak{B}$ \ $\mathfrak{S}_o$	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	E
B_1	×			×	×	3
B_2			×	×	×	3
B_3		×		×	×	4
B_4	×	×	×		×	4

$\mathfrak{B}$ ist jedenfalls reduziert und abgeschlossen. Nun sei die Entscheidung von f bezüglich B_1 unabhängig von B_2. Dann fällt diese Entscheidung sicher und mit Recht positiv aus: B_1 ist Element des Minkernes $\{B_1, B_4\}$ mit der Bewertung 7.

Wegen der Unabhängigkeit der Entscheidung von B_2 wird B_1 also stets als Element eines Minkerns erkannt; es ist daher nur B_2^* so zu finden, daß $\mathfrak{B}^* = \{B_1, B_2^*, B_3, B_4\}$ reduziert und abgeschlossen bleibt, $\{B_1, B_4\}$ aber bezüglich $\mathfrak{B}^*$ kein Minkern ist.

$\mathfrak{B}^*$ wird durch die folgende Tabelle gegeben:

$\mathfrak{B}^*$ \ $\mathfrak{S}_0$	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	E
B_1	×			×	×	3
B_2^*			×	×		2
B_3		×		×	×	4
B_4	×	×	×		×	4

Hier aber ist $\{B_2^*, B_4\}$ Minkern mit der Bewertung 6, womit bereits alles gezeigt ist.

Dieses Ergebnis legt die Vermutung nahe, daß es in solchen reduzierten und abgeschlossenen Systemen entweder keine Auswahlverfahren gibt oder nur außerordentlich komplexe, die eben stets die Gesamtsituation aller Familien zueinander erfassen - wobei diese "Gesamtsituation" dadurch gegeben sein könnte, daß gewisse der Familien einen Minkern bilden müßten; dies stände im Einklang mit dem rekursiven Bildungsgesetz und führte ohne weitere Erkenntnisse zum Ausgangspunkt zurück.

Diese Vermutung wird in Teil VI wieder aufgegriffen werden.

Eine andere Möglichkeit, das Überdeckungsproblem in Angriff zu nehmen, ist die, geeignete Iterationsverfahren zu entwickeln, die aus vorgegebenen Kernen durch entsprechend zu definierende Austauschschritte zu Minkernen führen. Hier bietet es sich zunächst an, das Überdeckungsproblem als Optimierungsproblem zu formulieren (vergl. dazu z.B. auch [8]):

Gegeben sei ein Ungleichungssystem $A \cdot x \geqslant b$; eine Lösung x wird dann i.a. nicht eindeutig bestimmt sein. Daher kann man in der Menge der Lösungen diejenigen auszeichnen, die z.B. noch eine Bedingung der Form $\sum_i c_i x_i = \text{Min!}$, (die sogenannte Zielfunktion), erfüllen.

(Die Analogität zu den auf Seite 17 gegebenen Bedingungen liegt auf der Hand. Im übrigen sei auf die ausführliche Darstellung der Optimierungstheorie in [4] verwiesen.)

Mit $\mathfrak{S}_o = \{T_{i_1},\ldots,T_{i_r}\}$ und $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{Q}_1,\ldots,\mathfrak{Q}_m\}$ wird A definiert durch:

(5) $$a_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{für } T_j \in \mathfrak{Q}_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit gilt:

(6) $$(a_{j,1},\ldots,a_{j,r}) \cdot x \geqslant 1 \iff \text{es gibt ein k so, daß } T_j \in \mathfrak{Q}_k \text{ und } x_k = 1$$

Jedes x repräsentiert dabei in eindeutiger Weise eine Teilmenge $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{B}$:

(7) $$x_i \in \{0,1\} \quad , \quad x_i = 1 \iff \mathfrak{Q}_i \in \mathfrak{H}$$

Mit (5) und (6) erhält man daraus:

(8) Das durch x repräsentierte Familiensystem $\mathfrak{H}$ ist genau dann ein Kern - $\mathfrak{H} \in \hat{K}(\mathfrak{S}_o,\mathfrak{B})$ - , wenn $A \cdot x \geqslant 1$ ist.

Zu den Minkernen gelangt man dann durch geeignete Wahl der Zielfunktion:

(9) $$\sum_i \left(E(\mathfrak{Q}_i) + 1 \right) \cdot x_i - 1 = \text{Min!} \qquad \text{(gemäß I, Def. 19)}$$

Insgesamt erhält man so:

(10) Das Minimierungsproblem definiert mit (5),..,(9) ein äquivalentes Optimierungsproblem, dessen Lösungen gerade die Minkerne repräsentieren.

Die Struktur der Optimierungsprobleme legt es nahe, Iterationsverfahren wie z.B. das Simplexverfahren zur Darstellung der Lösungen zu benutzen. Diese Verfahren bedienen sich einer iterierten Modifizierung der Matrix A, wobei insbesondere die Spaltenvektoren von A durch Linearkombinationen und rationale Operationen modifiziert werden. (×)

Inhaltlich bedeuten die Iterationsschritte eine sukzessive Änderung der iterierten Lösungen im Sinne einer monotonen Verbesserung der Erfüllung der Zielfunktion. (××)

Es liegt auf der Hand, daß bei diesen Verfahren Schwierigkeiten auftreten, wenn ganzzahlige Optimierungsprobleme gegeben sind, für die zudem noch ganzzahlige Lösungen verlangt werden. Auf eine solche spezielle Struktur führt ja offenbar auch das Minimierungsproblem.

Es gibt nun zwar Verfahren zur ganzzahligen linearen Optimierung; dabei handelt es sich aber entweder um modifizierte Verfahren vom Simplex-Typ, die dann approximativ vorgehen und erheblichen Rechenaufwand verursachen (siehe auch [4]), oder aber um tatsächlich diskrete Verfahren wie in [8], die dann aber nicht im eigentlichen Sinne (etwa nach (××)) iterativ sind.

Der Grund liegt darin, daß in ganzzahlig gegebenen Problemen die Ganzzahligkeit der Spalten von A durch die in (×) angedeuteten Manipulationen sehr bald verschwindet.
Besonders leicht sieht man das gerade in dem durch das Minimierungsproblem definierte Optimierungsproblem ein: m-dimensionale 0-1-Vektoren bilden keine additive Gruppe, also auch keinen Vektorraum über $\{0,1\}$.

Diese hier auftretenden Schwierigkeiten gehen in äquivalente Schwierigkeiten über, wenn man das Prinzip der Iteration unmittelbar auf das Minimierungsproblem anzuwenden versucht:

Sei $\mathfrak{K}$ ein durch Iteration erhaltener Kern von $\mathfrak{Z}_0$, der jedoch noch kein Minkern sein soll. Gibt es nun $\mathfrak{Q}^* \in \mathfrak{Z}$ mit $\mathfrak{Q}^* \notin \mathfrak{K}$, so daß für ein $\mathfrak{Q} \in \mathfrak{K}$ gilt, $\mathfrak{K}^* = (\mathfrak{K} - \{\mathfrak{Q}\}) \cup \{\mathfrak{Q}^*\}$ ist Kern oder zumindest Überdeckungssystem von $\mathfrak{Z}_0$ mit $E(\mathfrak{K}^*) \leqslant E(\mathfrak{K})$, so definiert der Übergang von $\mathfrak{K}$ zu $\mathfrak{K}^*$ einen weiteren zulässigen Iterationsschritt. Dabei werden also die Familien $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}^*$ gegeneinander ausgetauscht. Ein solcher Austausch muß jedoch nicht immer möglich sein:

Wegen $\mathfrak{A},\mathfrak{A}^* \in \mathfrak{B}$ ist jedenfalls $\mathfrak{A} \not\subset \mathfrak{A}^*$, so daß $T \in \mathfrak{A}$ existiert mit $T \notin \mathfrak{A}^*$. Dabei ist es aber durchaus möglich, daß für ein solches T $\mathfrak{R}_{\mathfrak{R}}(T) = \{\mathfrak{A}\}$ ist, daß also T durch $\mathfrak{R}^*$ überhaupt nicht erfaßt wird. Gilt dies für sämtliche Paare $\mathfrak{A},\mathfrak{A}^*$ von Familien, $\mathfrak{A} \in \mathfrak{R}$ und $\mathfrak{A}^* \in \mathfrak{B}-\mathfrak{R}$, die für einen gegenseitigen Austausch in Frage kommen, so ist an dieser Stelle kein Austausch mehr möglich. Mit $\mathfrak{R}$ bricht also das Iterationsverfahren ab, ohne daß $\mathfrak{R}$ bereits Minkern wäre.

Beispiel:

$\mathfrak{B}$ \ $\mathfrak{S}_0$	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	E
$\mathfrak{A}_1$	×	×	×			×	×	5
$\mathfrak{A}_2$		×	×	×	×	×		5
$\mathfrak{A}_3$	×			×				2
$\mathfrak{A}_4$					×		×	2

Dieses Beispiel ist so gewählt, daß $\mathfrak{B}$ reduziert und abgeschlossen ist.

Sei nun $\mathfrak{R} = \{\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2\}$ vorgegeben; $\mathfrak{R}$ ist sicher Überdeckungssystem von $\mathfrak{S}_0$, und es ist $E(\mathfrak{R}) = 10$.

Durch Familienaustausch erhält man aus $\mathfrak{R}$ genau die folgenden Systeme:

$$\mathfrak{R}^*_1 = \{\mathfrak{A}_3,\mathfrak{A}_2\} \quad , \quad \mathfrak{R}^*_2 = \{\mathfrak{A}_4,\mathfrak{A}_3\}$$
$$\mathfrak{R}^*_3 = \{\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_3\} \quad , \quad \mathfrak{R}^*_4 = \{\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_4\}$$

Keines dieser $\mathfrak{R}^*$ ist jedoch ein Überdeckungssystem von $\mathfrak{S}_0$. Andererseits aber ist $\mathfrak{R}$ kein Minkern, denn für den Kern $\mathfrak{R}^{**} = \{\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_3,\mathfrak{A}_4\}$ gilt $E(\mathfrak{R}^{**}) = 9$.

Denkbar wäre nun noch, wie auch das Beispiel andeutet, ein iteratives Verfahren, das statt Familien ganze Familiensysteme gegeneinander austauscht. So könnte etwa im obigen Beispiel das System $\{\mathfrak{A}_2\}$ gegen $\{\mathfrak{A}_3,\mathfrak{A}_4\}$ ausgetauscht werden.

Aber auch das führt auf Schwierigkeiten, wenn $\mathfrak{B}$ disjunkt in einen Minkern und einen Kern mit nicht-minimaler Bewertung zerfällt:

$\mathfrak{B} = \mathfrak{R}_0 \cup \mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{R}_0 \cap \mathfrak{R} = \emptyset$ und $E(\mathfrak{R}_0) < E(\mathfrak{R})$.

Liegt dann $\mathfrak{K}$ in einem Iterationsschritt als Kern vor, so kann es tatsächlich notwendig sein, wie im obigen Beispiel gezeigt, ganz $\mathfrak{K}$ gegen ganz $\mathfrak{K}_o$ auszutauschen. Damit erweist sich aber offenbar ein solches Iterationsverfahren als nicht praktikabel. Dazu noch abschließend ein Beispiel:

$\mathfrak{B}$ \ $\mathfrak{S}_o$	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	E
$\mathfrak{S}_1$	×	×			×	3
$\mathfrak{S}_2$		×	×	×		3
$\mathfrak{S}_3$	×	×	×			3
$\mathfrak{S}_4$				×	×	2

Wie man leicht sieht gilt:

$\mathfrak{K}_o = \{\mathfrak{S}_3, \mathfrak{S}_4\}$ ist Minkern mit $E(\mathfrak{K}_o) = 5$

$\mathfrak{K} = \{\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2\}$ ist Kern mit $E(\mathfrak{K}) = 6$

Zudem ist $\mathfrak{K} \cup \mathfrak{K}_o = \mathfrak{B}$, $\mathfrak{K} \cap \mathfrak{K}_o = \emptyset$.

Ist $\mathfrak{K}$ gegeben, so liegt tatsächlich die oben diskutierte Situation vor.

VI) Zur Existenz von darstellenden Algorithmen

Dieser Teil der Arbeit soll nicht unbedingt fertige und praktisch anwendbare Ergebnisse liefern. Vielmehr handelt es sich hier um Denkansätze, die Untersuchungen darüber zum Inhalt haben, wann es zu "irgendwie" definierten Mengen Algorithmen geben kann, mit Hilfe derer sich diese Mengen elementweise angeben lassen.

In der praktischen Anwendung mathematischer Algorithmen ist es i. a. das Hauptanliegen, die Lösungsmenge eines vorgegebenen Problems durch einen geeigneten Algorithmus elementweise anzugeben. Das heißt: Aus einer grundsätzlich zur Verfügung stehenden Menge von Objekten, die mit gewissen Eigenschaften versehen sind, sind durch einen geeigneten Algorithmus Objekte mit einer speziellen, durch das Problem bedingten Eigenschaft auszusondern.

Die folgenden Überlegungen laufen nun nicht in die Richtung "Theorie der Algorithmen, Entscheidbarkeit, etc.", sondern sie befassen sich ganz elementar mit den Zusammenhängen Menge- Eigenschaft - Existenz von darstellenden Algorithmen.

A) Mengen und Eigenschaften:

(Vergleiche hierzu etwa auch [9] und [10].)
Gegeben seien zwei endliche, nichtleere Mengen X und E, deren Elemente Objekte bzw. Elementareigenschaften genannt werden sollen. Weiter sei eine linkstotale Relation $\leftrightarrow$ auf $X \times E$ erklärt.

(1) Für jedes $x \in X$ gibt es also mindestens ein $e \in E$, so daß $x \leftrightarrow e$ gilt. Dafür wird auch $e(x)$ geschrieben mit der Sprechweise 'x hat die Elementareigenschaft e'. Zwei Klassenbildungen bieten sich unmittelbar zur Untersuchung an:

a) Zu gegebenem $e \in E$ wird die Menge aller derjenigen $x \in X$ ausgezeichnet, für die $x \leftrightarrow e$ gilt. Dies definiert offenbar eine Äquivalenzrelation e^* auf X :

$$x \; e^* \; y \iff x \leftrightarrow e \quad \wedge \quad y \leftrightarrow e$$

Man erhält so die Äquivalenzklasse $[x]_{e^*}$, wofür auch in bekannter Weise $\{ x \mid x \leftrightarrow e \}$ oder M_e geschrieben wird.

b) Als zweite Möglichkeit bietet sich an, zu gegebenem x alle $e \in E$ mit $x \leftrightarrow e$ aufzusuchen. Dann ist durch

$$e_1 \; s \; e_2 \iff x \leftrightarrow e_1 \wedge x \leftrightarrow e_2$$

eine Äquivalenzrelation s auf E gegeben; $s(x) \subset E$ bezeichne die zu x gehörende Äquivalenzklasse.
Damit ist die durch $s : X \longrightarrow \mathfrak{P}(E)$ mit $x \longmapsto s(x)$ definierte Relation eine Abbildung.

Aus b) lassen sich einige Folgerungen ziehen:

Zu einer gegebenen Menge E von Elementareigenschaften sind zwei Objekte x und y nur unterscheidbar, wenn $s(x) \neq s(y)$ gilt. Man kann den Begriff der Gleichheit in X daher definitiv festlegen durch:

$$(2) \qquad x \equiv y \iff s(x) = s(y)$$

Dabei ist rechts die Gleichheit gemeint, die sich durch elementweises Nachprüfen versteht. Links dagegen ist eine inhaltliche Gleichheit in Form einer Ununterscheidbarkeit gemeint (vergl. auch [11]). Das heißt: x und y können bezüglich E gleich sein, jedoch bezüglich $E' \supset E$ wohlunterschieden sein. Dies ist eine Interpretation, die durchaus auch aus dem intuitiven Gebrauch geläufig ist.

Damit legt es (2) nahe, den folgenden Begriff zu prägen:

(3) $H_x := s(x)$ heißt definierende Eigenschaft von x.

In Verallgemeinerung dieses Begriffs erhält man:

(4) $H \subset E$ heißt Eigenschaft;
H heißt Eigenschaft von x, $H(x)$ oder $x \leftrightarrow H$, wenn $x \leftrightarrow e$ gilt für alle $e \in H$.
Zudem soll stets $x \leftrightarrow \emptyset$ gelten für alle $x \in X$.

Anmerkung: Zur Vereinfachung sollen, wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind, sowohl für die Eigenschaften $H \subset E$ als auch für die Elementareigenschaften $e \in E$ die Schreibweisen $x \leftrightarrow H$ und $x \leftrightarrow e$ bzw. $H(x)$ und $e(x)$ verwendet werden.

Man erhält so als Verallgemeinerung von (1) a), b) :

(5) Zu gegebenem $H \subset E$ wird die Menge aller derjenigen $x \in X$ ausgezeichnet, für die $x \leftrightarrow H$ gilt. Dafür soll auch geschrieben werden: $M_H = \{ x \mid x \leftrightarrow H \} = \{ x \mid H(x) \} \subset X$.
Insbesondere gilt nach (4) : $M_\emptyset = X$.

(6) Als Übertragung von (6) auf Eigenschaften erhält man nach (4) zu gegebenem $x \in X$:

$$\alpha)\ x \leftrightarrow H \iff H \subset H_x$$

Daraus ergibt sich unmittelbar:

$$\beta)\ x \leftrightarrow H \quad \text{und} \quad H' \subset H \implies x \leftrightarrow H'$$

Die Zweistelligkeit der $\in$-Relation induziert nun die Übertragung der Betrachtung von X auf $\mathfrak{P}(X) = \mathfrak{X}$. Ausgehend von $\mathfrak{X}$ als zugrundeliegender Menge von Objekten kann dazu eine nichtleere Menge $\mathfrak{E}$ von Elementareigenschaften betrachtet werden.
Wie oben kann man dann den $M \in \mathfrak{X}$ definierende Eigenschaften $\mathfrak{H}_M \subset \mathfrak{E}$ zuweisen; weiter ist allgemein jedem $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{E}$ ein Mengensystem $\mathfrak{M}_\mathfrak{H} = \{ M \mid M \leftrightarrow \mathfrak{H} \} \subset \mathfrak{X}$ zugeordnet.

Mit den Bezeichnungen "äußere Eigenschaft" für die $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{E}$ und "innere Eigenschaften" für die $H \subset E$ bezüglich der Menge $M \in \mathfrak{X}$ erhält man so:

(7) Jedes $M \in \mathfrak{X}$ kann durch geeignetes $H \subset E$ eindeutig bestimmt werden in der Form $M = \{ x \mid x \leftrightarrow H \}$; es kann zudem erfaßt werden durch $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{E}$ gemäß $M \in \mathfrak{M} = \{ M \mid M \leftrightarrow \mathfrak{H} \}$.
Jedes $M \in \mathfrak{X}$ läßt läßt sich also durch Angabe einer inneren und einer äußeren Eigenschaften vollständig beschreiben, wobei natürlich die äußere Eigenschaft nicht die Eindeutigkeit liefert.

(8) Jeder äußeren Eigenschaft ist eine Menge von inneren Eigenschaften eindeutig zugeordnet.

Die wesentlichen Fragestellungen ergeben sich nun aus der folgenden Überlegung:

In der Mathematik sind, zumeist durch Problemstellungen bedingt, i.a. Mengen X von Objekten vorgegeben, zu denen gewisse Eigenschaften bekannt, nachprüfbar oder zumindest definitiv erklärt sind. Auf X lassen sich dann hypothetisch gewisse Relationen oder Strukturen erklären in der Form:

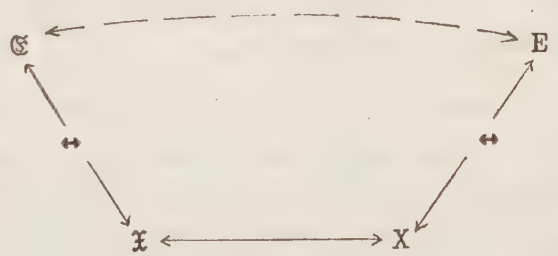
> Eine Menge M von Elementen $x \in X$ heißt "NAME",
> wenn für sie die Beziehungen $\langle B_i \rangle_i$ erfüllt sind.

Dann ist durch 'M heißt NAME' bzw. 'für M gelten die Beziehungen $\langle B_i \rangle_i$' eine äußere Eigenschaft erklärt; diese definiert i.a. eine ganze Klasse solcher M, so daß es einen Sinn hat, nach allen M mit dieser äußeren Eigenschaft zu fragen. Es ist dann ein Anliegen der Mathematik, theoretische Aussagen über solche, durch äußere Eigenschaften definierte Klassen zu machen.

Parallel dazu ist es ein Anliegen der mehr praktisch orientierten Zweige der Mathematik zu untersuchen, wie man die Mengen M einer solchen Klasse $\mathfrak{M} = \{ M \mid M \leftrightarrow \mathfrak{H} \}$ ihrerseits elementweise in X darstellen kann. Dabei wird davon ausgegangen, daß i.a. nur Aussagen der Form " $x \leftrightarrow H$ " unmittelbar entschieden werden können, gemäß dem allgemein üblichen methodischen Vorgehen.

Die Frage ist damit:
Wie muß der Zusammenhang zwischen $\mathfrak{E}$ und E aussehen, damit man gemäß (8) äußere Eigenschaften $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{E}$ auf Mengen von inneren Eigenschaften $H \subset E$ zurückführen kann.

Zur Verdeutlichung diene das folgende Diagramm:



Diese Frage kann hier nicht in ihrer vollen Allgemeinheit untersucht werden, zumal die Beantwortung dieser Frage für jede spezielle Konfiguration vom jeweiligen mathematischen Erkenntnisstand abhängt.

Es soll daher im folgenden das Problem untersucht werden, welche Struktur $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{E}$ in Bezug auf E haben muß, damit $M \in \mathfrak{M} = \{ M \mid M \leftrightarrow \mathfrak{H} \}$ in X elementweise dargestellt werden kann.

Dieses "elementweise" ist der Kernpunkt der ganzen Überlegungen; deshalb soll zunächst versucht werden, diesen und die damit im Zusammenhang stehenden Begriffe zu klären und zu präzisieren.

B) Bekannte und darstellbare Mengen:

Wie unter A) werden auch hier stets endliche Mengen vorausgesetzt.

(9) Unter einer bekannten Menge soll die primitivste, nicht weiter zu reduzierende Form einer Menge verstanden werden. Es sollen ohne Auswertung von Formeln, Anwendung von Algorithmen o.ä. unmittelbar und eindeutig - d.h. Namen und Inhalte der Elemente sind identisch - alle Elemente der Menge ersichtlich sein.

Sind also etwa x_1, x_2, x_3, x_4 Objekte, die in ebendieser Form zur Verwendung als Elemente zur Verfügung stehen, so ist $\{x_2, x_3, x_4\}$ eine bekannte Menge, auch $\{x_1, x_3\}$ ist bekannt usw.; dagegen würde die Menge $\{x_i \mid i = 1,2,3,4\}$ nicht als bekannt gelten.

(10) Eine Menge soll darstellbar heißen, wenn sie aufgrund gegebener Formeln, Abbildungen, Algorithmen o.ä. in eine bekannte Menge überführt werden kann. In diesem Sinn wird zu einer darstellbaren Menge M die zugehörige bekannte Menge deren Realisierung R(M) genannt.

Nach (9) ist also die Menge $M = \{x_i \mid i = 1,2,3,4\}$ zwar nicht bekannt; unter Ausnutzung der üblichen Konventionen erhält man jedoch deren Realisierung $R(M) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. M ist daher nach (10) eine darstellbare Menge.

R nimmt also keine inhaltliche Änderung an der vorgegebenen Menge M vor. Präzisierend müßte man daher unterscheiden zwischen inhaltlicher und formaler Gleichheit (vergl. dazu auch wieder [11]) : zwei Dinge können inhaltlich gleich, jedoch formal verschieden sein. (Auch der umgekehrte Fall ist denkbar, aber hier nicht interessant.) Insofern wäre es exakter, von der formalen Gestalt F(M) einer Menge M zu sprechen, die etwa das Prädikat B ("bekannt") oder D ("darstellbar") erhalten kann. Damit ergibt sich:

$$F(M) = B \Longrightarrow F(M) = D$$

$$F(M) = D \Longleftrightarrow \text{es gibt R, so daß } R(F)(M) = B$$

$$F(M) = B \Longrightarrow R(F)(M) = F(M)$$

In diesem Sinne stört das Einfügen eines Realisierungsoperators auch nicht eine Kette inhaltlich gemeinter Gleichungen:

$$\begin{aligned} M &= \{ x_i \mid i = 1,2,3,4 \} \\ &= \{ x_1, x_2, x_3, x_4 \} \\ &= R(M) \end{aligned}$$

Es seien nun M_1 und M_2 bekannte Mengen, und man wende die Operation $\cap$ auf M_1 und M_2 an:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{ x_1, x_2, x_3 \} \\ M_2 &= \{ x_1, x_3, x_4 \} \\ M_1 \cap M_2 &= \{ x_1, x_2, x_3 \} \cap \{ x_1, x_3, x_4 \} \end{aligned}$$

Es ist plausibel, daß von dieser Stelle der Übergang zu

$$M_1 \cap M_2 = \{ x_1, x_3 \}$$

unmittelbar erfolgen kann, ohne daß man von einer Anwendung eines eigentlichen Realisierungsoperators sprechen kann. Daher gilt: Mit M_1 und M_2 sind auch $M_1 \cap M_2$ und allgemein

$M_1 \cup M_2$ und $\neg M_1$, $\neg M_2$ bekannt.

Ganz analog erhält man Aussagen für darstellbare Mengen.

Daraus erhält man sofort:

(11) $\langle M_i \rangle_i$ sei eine Familie bekannter Mengen; diese Mengen werden mit Operationen $\cap$, $\cup$, $\neg$ in irgendeiner Weise verknüpft. Dann ist das Ergebnis $\mathfrak{O}(M_i)_i$ auch bekannt.
(Entsprechend für darstellbare Mengen)

Andererseits gilt:

(12) Ist eines der M_i nicht bekannt sondern nur darstellbar, dann ist offenbar $\mathfrak{O}(M_i)_i$ höchstens darstellbar; da jede bekannte Menge aber darstellbar ist, ist $\mathfrak{O}(M_i)_i$ nach (11) dann auch tatsächlich darstellbar.
Ist dagegen eines der M_i nicht wenigstens darstellbar, dann trifft das auch für $\mathfrak{O}(M_i)_i$ zu.

Das heißt:

(13) $\mathfrak{O}(M_i)_i$ ist bekannt $\iff$ alle M_i sind bekannt

$\mathfrak{O}(M_i)_i$ ist darstellbar $\iff$ alle M_i sind (mindestens) darstellbar.

Bei der Inklusion zweier Mengen, $M_1 \subset M_2$, muß man unterscheiden, ob dieser Ausdruck eine Aussage ist, die entschieden werden soll, oder ob der Ausdruck ein Hinweis sein soll, zu einer der beiden Mengen die andere passend zu finden. Im zweiten Fall wäre durch " $M_1 \subset M_2$ " eine äußere Eigenschaft definiert, der die jeweils gesuchte Menge genügen muß; das soll aber hier nicht weiter interessieren. Für den ersten Fall hingegen ist sofort einsichtig:

(14) Sind M_1 und M_2 bekannt, so ist die Aussage

" $M_1 \subset M_2$ " unmittelbar entscheidbar.

Es können nun die Ansätze von A) aufgegriffen werden:

(15) Die auf Seite 101 gemachten Voraussetzungen über X und E , die dort nur intuitiv gefaßt werden konnten, sollen nun durch die neuen Begriffe präzisiert werden. Es wird demnach vereinbart:

a) E ist bekannt
b) X ist darstellbar
c) für alle $x \in X$ ist H_x bekannt

Zu a): Da E die Menge der Eigenschaften ist, die tatsächlich real vorliegen sollen, erscheint es nicht sinnvoll, E anders als bekannt vorauszusetzen; man müßte sonst die Elemente und Teilmengen von E wiederum durch Eigenschaften definieren usf..

Zu c): Es wird sich zeigen, (in (16)), daß die Forderung dieser schwachen Form von Entscheidbarkeit im allgemeinen ausreichen wird. Daß diese Forderung andererseits überhaupt sinnvoll ist liegt darin begründet, daß i.a. die Bezeichnungen, d.h. die Namen der Elemente, gerade einem System von Eigenschaften zugeordnet werden, wie in A) bereits dargelegt wurde. Ein Element kann also gerade als "Spezifikator" einer Klasse von Eigenschaften interpretiert werden (vergl. (1)a)).

Man erhält:

(16) Nach (15),c) ist f.a. $x \in X$ H_x bekannt.
Sei nun $H \subset E$ eine bekannte Eigenschaft, dann ist $H \subset H_x$ nach (14) entscheidbar. Nach (6) ist

$x \leftrightarrow H \Longleftrightarrow H \subset H_x$, so daß also auch $x \leftrightarrow H$ entscheibar ist.

Das heißt: Für bekanntes $H \subset E$ ist $x \leftrightarrow H$ für alle $x \in X$ stets entscheidbar.

Im Sinne der Bemerkung zu (15),c) soll noch weitergehend für E vereinbart werden:

(17) Die einzigen beschreibbaren Mengen, d.h. die einzigen Mengen in E, die elementweise anzugeben sind, sind die bekannten Mengen. Zu E sollen also überhaupt nur über bekannte Mengen Aussagen gemacht werden können.
(Selbst darstellbare Mengen würden ja schon die Existenz von definierenden Eigenschaften voraussetzen usw.)

Dabei ist zu beachten, daß, da E selbst bekannt ist, jede beliebige Teilmenge von E "hingeschrieben" und damit bekannt gemacht werden kann.

Damit gilt:

(18) Zu E sind Aussagen der Form "$H_1 \subset H_2$" nur entscheidbar, wenn sowohl H_1 als auch H_2 bekannt sind. Dies ist die Umkehrung zu (14).

Daraus folgt die Verallgemeinerung von (16):

(19) Für $x \in X$ und $H \subset E$ ist $x \leftrightarrow H$ genau dann entscheidbar, wenn H bekannt ist.

Dies beinhaltet das wichtige einschränkende Prinzip, mit dem auch Aussagen über Mengen und Mengensysteme - etwa beim Übergang von X zu $\mathfrak{X}$ - untersucht werden müssen.

In den folgenden Punkten wird untersucht, wann $M \subset X$ darstellbar ist, wann also - nach (10) - ein realisierender Algorithmus existiert.

(20) Dem Wesen einer solch ganz realen Bekanntmachung der Elemente entsprechend soll hier dieser Übergang von M zu R(M) durchaus als ein Prozess verstanden werden, der einen diskreten zeitlichen Ablauf hat, so daß in jeder Aktion des Prozesses genau ein x aus M bekannt gemacht wird. Dies entspricht auch der Vorstellung von der Arbeitsweise eines Algorithmus, wie er als optimaler Algorithmus auf den Seiten 89 ff. gesucht wurde.

(21) Es sei $M \subset X$; dann gilt:

M darstellbar $\Longleftrightarrow$ zu jedem $x \in X$ ist (im Zeitpunkt der Entscheidung über "$x \in M$") ein $H^X \subset E$ bekannt, so daß $x \in M \Longleftrightarrow x \leftrightarrow H^X$.

Beweis: "$\Longleftarrow$" Es wird der Reihe nach X durchlaufen. Nach Voraussetzung ist zu dem Zeitpunkt, in dem "$x \in M$" entschieden werden soll, H^X bekannt. Nach (19) ist dann auch $x \leftrightarrow H^X$ entscheidbar und damit nach Voraussetzung auch "$x \in M$".

"$\Longrightarrow$" Annahme:

a) Für ein $x \in X$ ist kein H^X bekannt; dann läßt sich nach (19) auch "$x \in M$" nicht entscheiden, M hat also keine bekannte Realisierung.

b) Für ein $x \in X$ gilt für kein bekanntes H^X, daß $x \in M \Longleftrightarrow x \leftrightarrow H^X$. Dann folgt die Unentscheidbarkeit von "$x \in M$" in der gleichen Weise wie in a).

In jedem Fall gilt also: M ist nicht darstellbar. Widerspruch!

Mit (21) erscheint die folgende Definition vernünftig:

(22) x soll bezüglich M genau dann entscheidbar heißen, wenn (im Zeitpunkt der Betrachtung) H^X bekannt ist mit $x \in M \Longleftrightarrow x \leftrightarrow H^X$.

Eine erste, einfache Aussage läßt sich nun machen:

(23) Jedes $M \subset X$, das durch eine bekannte innere Eigenschaft definiert ist, ist darstellbar.

Beweis: Es ist $M = \{ x \mid x \leftrightarrow H \}$, d.h. $x \in M \Longleftrightarrow x \leftrightarrow H$. Da H bekannt ist, folgt daraus mit $H^x = H$ f.a. x nach (21) sofort die Richtigkeit der Behauptung.

Diese Aussage stellt den Zusammenhang mit A) her und zeigt, daß die inzwischen in B) erhaltenen Ergebnisse mit den Forderungen aus A) verträglich sind.

Mit (17) sollen in E überhaupt nur bekannte Teilmengen angebbar sein. Damit kann man o.B.d.A. sogar sagen: Jede durch eine innere Eigenschaft definierte Menge ist darstellbar.

Es sei nun $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{E}$ gegeben. Aus (20) folgt, daß bei der algorithmischen Bestimmung der M mit $M \leftrightarrow \mathfrak{H}$ die Elemente eines jeden M in irgendeiner Reihenfolge angegeben werden; es muß also zunächst in jedem Fall ein erstes Element x_o bestimmt werden. Hierzu ist nach (21) notwendig und hinreichend, daß eine innere Eigenschaft H^o bekannt ist. Damit gilt:

(24) Zu einer äußeren Eigenschaft $\mathfrak{H}$ können überhaupt nur dann darstellbare Mengen M mit $M \leftrightarrow \mathfrak{H}$ angegeben werden, wenn in $\mathfrak{H}$ eine innere Eigenschaft H^o bekannt ist. Dieses so definierte H^o soll Starteigenschaft heißen.

Mit diesem Ergebnis kann nun bereits die in V, C) aufgeworfene Frage, ob es überhaupt einen optimalen Algorithmus (im Sinne von Seite 90) für das Überdeckungsproblem geben kann, beantwortet werden:

Zunächst folgt aus V, (4) und eigentlich auch schon aus IV, Def. 1, daß zu der Eigenschaft eines Überdeckungssystems, Kern oder gar Minkern zu sein, keine Starteigenschaft H^o bekannt ist.

Allgemein muß nun jedoch das Fehlen einer Starteigenschaft in einer äußeren Eigenschaft nicht unbedingt heißen, daß die Mengen M des entsprechenden Systems $\mathfrak{M}$ nicht darstellbar sind. Möglicherweise erkennt man - etwa nach Vergrößern der Mengen $\mathfrak{E}$ und E und durch Erweiterung des mathematischen Erkenntnisstandes - eine äquivalente äußere Eigenschaft, die ebenfalls $\mathfrak{M}$ bestimmt, und die aber eine Starteigenschaft aufweist.

Insbesondere für Überdeckungsprobleme läßt sich diese Frage jedoch abschließend beantworten:

(25) Sei $\mathfrak{H}$ eine äußere Eigenschaft mit $\mathfrak{M} = \{ M \mid M \leftrightarrow \mathfrak{H} \}$, so daß H^0 Starteigenschaft von $\mathfrak{H}$ ist. Dann müssen offenbar alle $M \in \mathfrak{M}$ mit M^0, $M^0 \leftrightarrow H^0$, mindestens ein Element gemeinsam haben. Da aber H^0 als Teil der definierenden Eigenschaft jedem $M \in \mathfrak{M}$ zukommt, ist auch speziell M^0 selbst als Teilmenge eines $M' \in \mathfrak{M}$ zulässig. Das heißt: Es gibt ein $M' \in \mathfrak{M}$, so daß für alle $M \in \mathfrak{M}$ gilt: $M \cap M' \neq \emptyset$.

Und ebendies ist für die Menge der Minkerne eines Überdeckungsproblems i.a. nicht der Fall, wie das folgende Beispiel zeigt (dabei ist $\mathfrak{B}$ wieder reduziert und abgeschlossen):

$\mathfrak{B}$ \ $\mathfrak{T}_0$	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	E
B_1	×	×			×	3
B_2		×	×	×		3
B_3	×	×		×		3
B_4		×	×		×	3
B_5	×		×			2

Die beiden einzigen Minkerne sind in diesem Fall offenbar $\mathfrak{K}_1 = \{ B_1, B_2 \}$ und $\mathfrak{K}_2 = \{ B_3, B_4 \}$, womit wegen $\mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{K}_2 = \emptyset$ bereits alles gezeigt ist.

Daraus folgt:

(26) Für die Lösungsmengen von Überdeckungsproblemen sind i.a. keine Starteigenschaften anzugeben. Das heißt nach (24):

Die Minkerne sind im Sinne von (20) nicht durch einen optimalen Algorithmus darstellbar.

Dies bestätigt die Vermutungen aus Teil V,C) .

Dieses Ergebnis schließt natürlich nicht aus, daß man $\mathfrak{H}$ so in Teil-Eigenschaften $\mathfrak{H}_i$ zerlegen kann, daß diese jeweils Starteigenschaften H_i^0 enthalten, so daß mit $\mathfrak{M}_i = \{ M \mid M \leftrightarrow \mathfrak{H}_i \}$ schließlich $\mathfrak{M} = \bigcup_i \mathfrak{M}_i$ gilt. Das hieße also, $\mathfrak{H}$ durch eine Familie $\langle (\mathfrak{H}_i, H_i^0) \rangle_i$ ersetzen.

Dies ist eine Möglichkeit, die auf Seite 107 grundsätzlich als zulässig erkannt wurde; man erkennt jedoch gleichzeitig die zusätzliche Schwierigkeit, die darin besteht, zunächst mittels einer genauen Analyse des vorgelegten Problems $\mathfrak{P}$ in die Komponenten $(\mathfrak{P}_i, H_i^o)$ zu zerlegen.

Interessanterweise ist das gerade der Weg, der bei dem in [8] gegebenen und in V, C) erläuterten Verfahren eingeschlagen wurde. Wie erwähnt wird dabei das Ausgangsproblem in schrittweise reduzierte Systeme paralleler Teilprobleme zerlegt, bis endlich ein System trivialer Anfangsprobleme übrigbleibt. Durch diese sind die Starteigenschaften H_i^o definiert, und es werden rückwärts gehend durch die sich rekursiv aufbauenden Teilprobleme rekursiv die Eigenschaften $\mathfrak{P}_i$ aufgebaut, zu denen - ihrerseits rekursiv - die Minkerne bestimmt werden.

In dieser Analyse zeigt sich auch unmittelbar der Abstand dieses Verfahrens zu einem - allerdings nicht existierenden - optimalen Algorithmus.

Damit haben die hier angestellten Überlegungen auch dazu geführt, vorliegende Ergebnisse besser einzuordnen, womit für diesen Teil ein harmonischer Abschluß gefunden worden zu sein scheint.

C) Rekursive Eigenschaften:

In B) wurde bezüglich der algorithmischen Darstellbarkeit die Notwendigkeit nachgewiesen, daß eine äußere Eigenschaft $\mathfrak{P}$ eine Starteigenschaft enthalten muß. Es wurde jedoch noch nicht geklärt, wie hinreichende Bedingungen zur Darstellbarkeit von Mengen M mit $M \leftrightarrow \mathfrak{P}$ aussehen müßten.

Gemäß (20), (21) ergibt sich nun zumindest eine interessante Klasse von äußeren Eigenschaften, die solchen hinreichenden Bedingungen genügen:

Sei H^0 als Startmenge bekannt; dann erhält man etwa x_0 mit $x_0 \leftrightarrow H^0$ im o-ten Schritt. Durch die Kenntnis von x_0 wird H_{x_0} bekannt, und für irgendeine Mengenoperation $\mathfrak{O}$ ist dann auch $H^1 = \mathfrak{O}(H^0, H_{x_0})$ bekannt. Dies liefert etwa x_1 mit $x_1 \leftrightarrow H^1$ usw.; allgemein wird also zu bereits bekanntem M' durch $y \leftrightarrow H'$ mit $H' = \mathfrak{O}(H^0, \langle H_x \rangle_{x \in M'})$ ein weiteres Element von M erkannt.

Man sieht, daß auf diese Weise mit

H^0 Starteigenschaft

$\mathfrak{H}^* = (M' \subset M$ bekannt; $y \in M \Longleftrightarrow \mathfrak{O}(H^0, \langle H_x \rangle_{x \in M'}) \subset H_y$ für $y \in X - M')$

durch $(H^0, \mathfrak{H}^*)$ eine äußere Eigenschaft $\mathfrak{H}$ definiert ist, die sämtliche $M \in \mathfrak{M} = \{ M \mid M \leftrightarrow \mathfrak{H} \}$ darzustellen gestattet.

$\mathfrak{H}^*$ heißt rekursive Eigenschaft.

Das heißt: Ist $M \leftrightarrow \mathfrak{H}$ gegeben, und ist $\mathfrak{H}$ rekursiv mit Starteigenschaft, dann ist M darstellbar.

(Die Tatsache, daß $\mathfrak{M}$ i.a. mehr als ein Element M hat, kommt darin zum Ausdruck, daß an jeder Stelle $\mathfrak{O}(H^0, \langle H_x \rangle_{x \in M'})$ i.a. mehr als ein y definiert, so daß in der Tat Verzweigungen auftreten, die eben gerade auf sämtliche Mengen M von $\mathfrak{M}$ führen.)

An dieser Stelle zeichnet sich ein weiterer Zusammenhang ab: Während rekursive Eigenschaften mit Starteigenschaft darstellende Algorithmen definieren, scheinen rekursive Eigenschaften ohne Starteigenschaft iterative Algorithmen zu definieren. Ist nämlich M^* eine irgendwie ohne Starteigenschaft erhaltene Menge, $M^* = \{x_1, \ldots, x_n\}$, so sind durch die x_i die Eigenschaften H_{x_i} gegeben. Man kann dann z.B. $\mathfrak{O}(\langle H_{x_i} \rangle_{i \neq j}) = M'_j$ bilden und $x_j \leftrightarrow H'_j$ prüfen; ist dies für jedes j erfüllt, so ist durch M^* offenbar tatsächlich eine der gesuchten Mengen gefunden. Im anderen Fall muß eines der x_j, für das $x_j \leftrightarrow H'_j$ nicht galt, gemäß der Eigenschaft H'_j ausgetauscht werden usw.. Offenbar ist dadurch tatsächlich ein iterativer Algorithmus gegeben - nur ist im allgemeinen nicht geklärt, ob dieser Algorithmus auch zum Ziel führt.

In diesem Zusammenhang erweist sich auch, daß durch IV, Def. 1 eine rekursive Eigenschaft ohne Starteigenschaft für die Menge der Kerne gegeben ist. Die Prüfung, ob ein Überdeckungssystem tatsächlich ein Kern ist, läßt sich dabei genau nach dem oben gegebenen iterativen Muster durchführen. Jedoch ist damit in diesem Fall kein iterativer Algorithmus gegeben, wie in V, C) nachgewiesen wurde.

Den Abschluß soll ein Beispiel bilden, in dem ein spezielles Überdeckungsproblem, dessen Lösungsmenge durch eine rekursive Eigenschaft ohne Starteigenschaft definiert ist, durch einen recht ökonomisch arbeitenden iterativen Algorithmus behandelt werden kann.
(Der Verfasser hat ein umfangreiches Manuskript über dieses Beispiel ausgearbeitet, und er behält sich vor, weitere Untersuchungen im Sinne der unten angegebenen Verallgemeinerung durchzuführen.)

Mit den Bezeichnungen von Teil IV sei $\mathfrak{S}_o = \{T_1,\ldots,T_N\}$ vorgegeben. Insbesondere sei nun $\mathfrak{B}$ so gegeben, daß für jedes $B \in \mathfrak{B} = \{B_1,\ldots,B_k\}$ gilt:

(27) $B = \{T_i,T_{i+1},\ldots,T_{j-1},T_j\}_{(\mathrm{mod}\ N)} =: \langle a,e\rangle$ mit $a=i$, $e=j$

Das heißt: Zu einem gegebenen Paar (i,j) von Indizes mit $i \leqslant j$ enthält B sämtliche T_ν fortlaufend von T_i bis T_j.
Dabei meint der Zusatz (mod N), daß i und j beliebig aus $\mathbb{Z}$ sein können, wobei T_i dann stets durch $T_{i^*} \in \mathfrak{S}_o$ mit $i^* \equiv i\ (N)$ und $1 \leqslant i^* \leqslant N$ ersetzt zu denken ist.

Bezüglich einer solchen Basis sind Kerne in besonders prägnanter Weise rekursiv zu beschreiben:

(28) $\{K_1,\ldots,K_r\}$ ist genau dann Kern von $\mathfrak{S}_o$, wenn - mit $K_i = \langle a_i,e_i\rangle$ - gilt.

1) $e_{i-2}+1 < a_i \leqslant e_{i-1}+1$ für $i = 3,\ldots,r$

2) a) $e_{r-1}+1 - N < a_1 \leqslant e_r+1 - N$

b) $e_r+1 - N < a_2$

Dabei stellt 1) die lokale Kernbedingung dar, die insbesondere an der durch den zyklischen Zusammenschluß gegebenen Nahtstelle die Form 2) hat.

Es lassen sich nun spezielle Folgen von Basiselementen bilden, sogenannte Kernsequenzen, deren Elemente an jeder Stelle $(\ldots,K_{i-2},K_{i-1},K_i,\ldots)$ der lokalen Kernbedingung genügen. Dabei soll festgehalten werden:

(29) In einer Kernsequenz ist jedes Element genau von den beiden vorhergehenden Elementen abhängig.

Ausgehend von einem beliebigen $B_\nu \in \mathfrak{B}$ werden nun zunächst, die Zyklizität von $\mathfrak{B}$ berücksichtigend, die folgenden Sequenzen gebildet, die trivialerweise Kernsequenzen sind:

(30)
$$S_1 = (B_\nu)$$
$$S_2 = (B_\nu, B_{\nu+1})$$
$$\vdots$$
$$S_{k+1} = (B_\nu, B_{\nu+k})$$

Die Indizes der Basiselemente sind (mod k) zu verstehen.

In diesem Sinne wird $\mathfrak{B}$ ständig weiter zyklisch durchlaufend, wobei jeweils die bereits vorhandenen Kernsequenzen gemäß (28) und (29) zu weiteren Kernsequenzen erweitert werden; dabei werden dem Problem gemäß speziell nur diejenigen Sequenzen zur Erweiterung zugelassen, für die gilt: Wird die Bewertung von Teilmengen von $\mathfrak{B}$ sinngemäß auf Sequenzen übertragen, dann müssen diese speziellen Sequenzen unter allen für die Erweiterung zulässigen Sequenzen minimale Bewertung haben. Dazu gibt es recht präzise Kriterien, wann welche Sequenzen erweitert werden können, so daß das Absuchen in engen Grenzen gehalten werden kann.

Als bemerkenswertes Ergebnis über das Funktionieren dieses so definierten Algorithmus erhält man:

(31) $\{K_1,K_2,\ldots,K_r\}$ ist genau dann Minkern von $\mathfrak{g}_o$, wenn in der Folge der Kernsequenzen eine Sequenz die Gestalt $(B_\nu, K_1, K_2,\ldots,K_r, K_1, K_2)$ hat.

Abgesehen von einem beliebigen Anfangselement werden also nur zwei "überflüssige" Elemente iteriert;diese liefern aber gerade das Kriterium dafür, daß die Iteration in einen stationären Zustand übergegangen ist. Eine weitere Iteration würde periodisch immer den gleichen Minkern erzeugen.

Als Verallgemeinerung besteht die folgende Vermutung:
Ist auf einer zyklisch geordneten Menge eine rekursive Eigenschaft $\mathfrak{H}$ definiert, so daß für die M mit $M \leftrightarrow \mathfrak{H}$ bezüglich der induzierten Ordnung gilt: jedes x aus M hängt von höchstens s Vorgängern ab, dann gilt in einer zu (31) analogen Sprechweise:

$M = \{x_1,\ldots,x_r\}$ ist genau dann Menge mit $M \leftrightarrow \mathfrak{H}$, wenn in der Folge der Sequenzen eine die Gestalt

$(y, x_1,\ldots,x_s,\ldots,x_r, x_1,\ldots,x_s)$ hat.

Verzeichnis der wichtigsten Definitionen:

Terme: (S. 7)

$$T = (t_{n-1},\ldots,t_0) \in \{0,1\}^n =: W^n$$

Konjunktive Form: (S. 7)

$$F(x) = \prod_{i=0}^{n-1} A_i(x_i) \quad , \quad A_i \in \mathfrak{A} \text{ mit } \mathfrak{A} = \{I,K\} \, ,$$

wobei $I(a)=a$, $K(a)=\bar{a}$ ist

$\mathfrak{F}$:= Menge der konjunktiven Formen

Disjunktive Normalform: (S. 9)

$$P \in \mathfrak{P}(\mathfrak{F}) \; : \; N_P(x) = \bigvee_{F_\nu \in P} F_\nu(x)$$

$\mathfrak{N}$:= Menge der disjunktiven Normalformen

Partielle konjunktive Form: (S. 10)

$$J \subset \{n-1,\ldots,0\} \; : \; F_J^*(x) = \prod_{i \in J} A_i(x_i) \quad , \quad A_i \in \mathfrak{A}$$

(auch einfach F^* oder F_J)

$\mathfrak{F}^*$:= Menge der partiellen konjunktiven Formen

Disjunktive Partialform: (S. 13)

$$P^* \in \mathfrak{P}(\mathfrak{F}^*) \; : \; N_{P^*}(x) = \bigvee_{F_{J_j} \in P^*} F_{J_j}(x)$$

$\mathfrak{N}^*$:= Menge der disjunktiven Partialformen

Familie: (S. 11)

$\mathfrak{Q} \subset W^n$ heißt Familie, wenn $F^* \in \mathfrak{F}^*$ existiert, so daß $F^*(T)=1 \Leftrightarrow T \in \mathfrak{Q}$.
Familien und partielle konjunktive Formen sind in diesem Sinne einander eindeutig zugeordnet.

Charakteristik: (S. 14)

$C \in W^{2^n} =: \mathfrak{C}$ heißt Charakteristik.

Zulässige Terme: (S. 19)

Zu gegebener Charakteristik C_o heißt T_i genau dann zulässiger Term, wenn für die i-te Komponente von C_o gilt: $c_{o,i} = 1$.

$\mathfrak{g}_o$:= Menge der zulässigen Terme (zu C_o)

Familiensysteme: (S. 19)

$\mathfrak{T}_o$:= Menge aller Familien, die mit Termen aus $\mathfrak{g}_o$ gebildet werden können
Allgemein werden Familiensysteme mit $\mathfrak{T}$ bezeichnet.

Basis:
(S. 20)

$\mathfrak{B}$:= Menge aller in $\mathfrak{T}_o$ bezüglich der Inklusion maximalen Familien

Verwandtschaft:
(S. 30)

$F_J \in \mathfrak{F}^*$, $J \subset \{n-1,\ldots,0\}$; $\mathfrak{A}$ zugehörige Familie:
$V(\mathfrak{A}) := \{n-1,\ldots,0\} - J$ heißt Verwandtschaft von $\mathfrak{A}$.

Kerne, Minkerne:
(S. 70)

$\mathfrak{B} \subset \mathfrak{S}$, $\bar{\mathfrak{T}} \subset \mathfrak{P}(\mathfrak{S})$:
$\mathfrak{K} \subset \bar{\mathfrak{T}}$ heißt Kern von $\mathfrak{B}$, wenn
1) $\mathfrak{B} \subset \bigcup_{K \in \mathfrak{K}} K$ und 2) $\mathfrak{B} \not\subset \bigcup_{K \in \mathfrak{K}-\{K^*\}} K$ f.a. $K^* \in \mathfrak{K}$.
$\overset{\wedge}{\mathfrak{K}}(\mathfrak{B},\bar{\mathfrak{T}})$:= Menge aller dieser Kerne

$\mathfrak{K} \in \overset{\wedge}{\mathfrak{K}}(\mathfrak{B},\bar{\mathfrak{T}})$ heißt Minkern, wenn seine Bewertung minimal ist.

$\overset{\wedge}{\mathfrak{K}}_o(\mathfrak{B},\bar{\mathfrak{T}})$:= Menge aller dieser Minkerne

Rand:
(S. 72)

$T \in \mathfrak{S}$, $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{S}$: $\mathfrak{R}_{\mathfrak{U}}(T) := \{U \mid U \in \mathfrak{U} , T \in U\}$ heißt Rand von T bezüglich $\mathfrak{U}$.

Literatur

[1] Samuel M. Caldwell
Der logische Entwurf von Schaltkreisen
R. Oldenbourg Verlag München - Wien 1964

[2] 2. Colloquium über Schaltkreis- und Schaltwerk-Theorie 1961
Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart 1963

[3] Colloquium über Schaltkreis- und Schaltwerk-Theorie 1960
Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart 1961

[4] Künzi/Tzschach/Zehnder
Mathematische Optimierung
B.G. Teubner Stuttgart 1966

[5] Hans-Dieter Ehrich
Dissertation zum Thema: Zur Theorie und Anwendung endlicher Minimalüberdeckungen
TU Hannover, Mai 1970

[6] Jürgen Perl
Diplomarbeit zum Thema: Minimierung disjunktiver Normalformen
FU Berlin, Juli 1969

[7] Prather
Introduction to Switching Theory
Boston 1967

[8] Eugene L. Lawer
Covering Problems: Duality Relations and a New Methods of Solution
J. SIAM Appl. Math.
Vol. 14, No.5, September, 1966

[9] Hans Hermes
Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit
Springer Verlag Berlin, Göttingen, Heidelberg 1961

[10] Jürgen Schmidt
Mengenlehre I
B.I. Hochschultaschenbücher 56/56a
Mannheim 1966

[11] Gottlob Frege
Funktion, Begriff, Bedeutung
Fünf logische Studien
Vandenhoeck & Ruprecht in Göttingen 1966

L E B E N S L A U F

Jürgen Perl
1 Berlin 19
Ulmenallee 62 a

11. 11. 1944	* in Flatow/Westpreußen Eltern: Werner Perl, Rentner - vordem Verwaltungsangestellter Charlotte Perl, geb. Berndt, Hausfrau
1. 9. 1950	8. Grundschule Berlin-Schöneberg
23. 6. 1951	9. Grundschule Berlin-Schöneberg
1. 4. 1956	2. O.W.Z. Berlin-Schöneberg
16. 2. 1963	Abitur
26. 4. 1963	Immatrikulation an der FUB Hauptfach: Mathematik
20. 11. 1965	Vorprüfung zum Diplom an der FUB
24. 7. 1969	Diplomprüfung an der FUB
16. 4. 1970	Wissenschaftlicher Assistent an der TUB - Studiengang Informatik